THESES présentées pour l'obtention du titre de DOCTEUR de l'UNIVERSITE de PARIS (mention Sciences) à l'UNIVERSITE de PARIS VI

par Monsieur De LORINGHOVEN Léo

Sujet de la Première Thèse :

" ÉQUATION DE BASE D'UNE THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ ET DE STRUCTURES ÉLASTIQUES DANS UN ESPACE DE RIEMANN "

Sujet de la Deuxième Thèse :

" DIFFÉRENTES MÉTHODES DE CONSTRUCTION du $(ds)^2$ DE SCHAWRZSCHILD "

Soutenues le 27 Mai 1970 devant la commission composée de :

Monsieur LICHNEROWICZ	Président
Madame TONNELAT	Examinateur
Madame CHOQUET	»
M	»
M	»
M	»
M	Invité

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551515_0005

THESES présentées
pour l'obtention
du titre
de DOCTEUR de l'UNIVERSITE
de PARIS
(mention Sciences)
à
l'UNIVERSITE de PARIS VI

par Monsieur De LORINGHOVEN Léo

Sujet de la 1ère Thèse :

"Equations de base d'une théorie de l'élasticité et de structures élastiques dans un espace de Riemann."

Sujet de la 2e Thèse :

"Différentes méthodes de construction du $(ds)^2$ de SCHAWRZSCHILD"

soutenues le 27 mai 1970 devant la Commission composée de :

Monsieur LICHNEROWICZ	Président
Madame TONNELAT	examinateur
Madame CHOQUET	"
M	"
M	"
M	"
M	invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLES DES MATIERES

	pages
Avant-propos du présent mémoire	1
Exposé de la méthode et discussion	3
Définitions et symbolisations.....	17

1ère PARTIE

FORMES LINEAIRES ET QUADRATIQUES DE L'ENERGIE

	pages
Avertissement	30
Première forme linéaire de l'élément de l'énergie	31
Systèmes de mesure	33
Deuxième forme linéaire de l'élément de l'énergie	35
Les deux formes linéaires de l'énergie	37
Formes linéaires de l'énergie et vecteurs unitaires	38
Dérivée d'un vecteur-force, et condition de l'harmonicité	39
Dérivées secondes de l'énergie	40
Formes quadratiques scalaires	42
Le tenseur de l'énergie	45
Formes extérieures linéaires et l'élément infinitésimal d'un moment statique d'une force	46

2ème PARTIE

EQUATIONS DE BASE D'UNE THEORIE DE L'ELASTICITE DANS L'ESPACE DE RIEMANN

	pages
Tableau de correspondance : Théorie de l'élasticité classique	47
Tableau de correspondance : Théorie de l'élasticité généralisée	49
Contraintes, flux et bivecteur élément de surface	50
L'élément $(d\sigma)^2$	53
Discussion des équations de compatibilité	55
Contraintes et densité de l'énergie	58
Métrique, tension et les équations du champ d'Einstein	61
L'invariant $\chi^2 T_{ji} T^{ij}$	65
Le tenseur métrique de déformation exprimé en symboles de Christoffel, de première espèce	69
Autre représentation de l'équation du champ	70
Coordonnées amorphes et condition d'harmonicité, (de de Donder)	71
Tenseur de déformation g_{ij} et tenseur de Kronecker	74
Tenseur de déformation et dérivées du potentiel.....	76
Le tenseur contracté R_{ij} de Ricci-Einstein	79
L'équation du champ en coordonnées harmoniques	81
L'équation de la conservation d'énergie en coordonnées harmoniques	82

3ème PARTIE

EQUATIONS FONDAMENTALES D'UNE THEORIE GENERALISEE DES STRUCTURES ELASTIQUES

	pages
Tenseur de déformation et d'influence	83
Le tenseur d'influence	85
Tenseur d'influence et dérivées du potentiel élastique	86
Element d'angle de déformation	88
Moment et énergie interne	89
Tenseur de rigidité angulaire	90
La fonction de rigidité angulaire et le tenseur de Riemann - Christoffel	93
Homogénéité des équations d'une structure élastique	95
Matrice de rigidité et de souplesse	97

Conclusion et perspectives pour la physique des milieux continus 99

AVANT - PROPOS
au
PRESENT MEMOIRE

Cette étude représente le résultat d'environ 16 années de réflexion et de 6 années de recherche systématique sur les différents éléments du thème choisi.

Travaillant comme ingénieur dans une entreprise de constructions métalliques, nous nous sommes alors heurtés à des difficultés d'ordre théorique au cours de l'étude de nombreux ouvrages d'art d'une certaine importance.

Les réponses que nous avons trouvées dans des traités classiques de la théorie de l'élasticité nous ont paru insuffisantes et certaines mêmes en contradiction avec notre sens constructif ou avec la réalité physique du problème.

Depuis 1965, l'auteur travaille comme ingénieur au Service "Recherches" du Centre Technique Industriel de la Construction Métallique (C.T.I.C.M.).

C'est en étudiant les bases de la théorie de la torsion des tiges de Vlassov et de Saint-Venant, ainsi qu'en examinant les conditions satisfaisant les équations de compatibilité et les troisièmes et quatrièmes dérivées des déformations, que l'auteur de ce mémoire a trouvé des idées lui permettant d'aboutir à la conclusion qu'il s'agissait - dès qu'on adopte la géométrie riemannienne - d'une discussion sur les symboles de Christoffel et de leurs dérivés (1) .

.../

---

(1) Le résultat de cette étude morphologique a été publié dans la revue C.T.I.C.M. "Construction Métallique", N° 2, Juin 1965, sous le titre : " Comparaison des théories de torsion des tiges selon Saint-Venant et Vlassov " .

Je voudrais ici remercier mon Directeur Général, M. Lucien WAHL, de l'intérêt qu'il a montré pour ces premiers efforts de ma part en vue de poser les bases d'une théorie de l'élasticité généralisée, des encouragements qu'il m'a prodigués, ainsi que du temps qui m'a dès lors été accordé pour poursuivre cette étude.

Les premiers résultats de cette recherche ont paru dans ma note à l'Académie des Sciences de Paris, sous le titre :
"Les équations de base d'une théorie de l'élasticité dans l'espace de Riemann et leur liaison avec les équations d'Einstein",
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262 - p. 319-322, 31 Janvier 1966,
qui a été présentée par M. A. Lichnerowicz, Professeur au Collège de France, en sa qualité de Membre de l'Institut.

Je voudrais également remercier ici, M. Paul Lévy, Professeur et Membre de l'Institut, M. le Prince Louis de Broglie, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, M. D. Dugué, Professeur et Membre de l'Institut, qui ont examiné ma note, et tout particulièrement M. Lichnerowicz pour l'intérêt qu'il a témoigné, son amabilité à l'examiner en détail et à la présenter.

Une deuxième note donne les résultats de travaux postérieurs sur ce thème, sous le titre : "Les tenseurs de déformation et d'influence d'une théorie de l'élasticité dans l'espace de Riemann et les équations fondamentales d'une théorie généralisée des structures élastiques".
Elle a également été présentée par M. Lichnerowicz à la séance du 6 Mars 1968 (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266 - p. 1021-1023).

Je lui exprime, ainsi qu'au Président du Jury et à tous ses Membres, l'expression de ma respectueuse gratitude.

Puteaux, le 2 Mars 1970

Léo de Loringhoven

Léo de LORINGHOVEN

EXPOSÉ de la MÉTHODE
et
DISCUSSION des RÉSULTATS

Jusqu'à présent la théorie de l'élasticité n'était que très superficiellement reliée à la physique mathématique.

A part quelques notions de mécanique introduites d'une façon assez arbitraire, l'invariant Energie sous forme de potentiel élastique ne jouait pas le rôle dominant qu'on devait lui attribuer.

La théorie de l'élasticité, jusqu'à présent, (nous l'appellerons dans cette étude : théorie de l'élasticité classique) ne pouvait pas donner - comme nous le démontrerons - des solutions dans un grand nombre de cas, avec l'emploi exclusif des coordonnées cartésiennes, ou bien les solutions n'étaient alors données que pour des cas très élémentaires.

Dans le domaine de l'infinitésimal, l'emploi de la géométrie enclidienne n'est plus valable pour le cas des surfaces initialement planes déformées ensuite sous l'action de sollicitations extérieures suivant des surfaces à double courbure.

Son emploi ne peut que conduire vers des résultats inexacts, acceptables seulement dans le cadre d'une approximation.

Nous connaissons des cas très élémentaires, comme par exemple celui de la torsion uniforme de Saint-Venant, pour lesquels la solution du problème avec les moyens de la théorie de l'élasticité classique peut être considérée comme rigoureuse dans les limites de cette dernière théorie.

Les équations d'équilibre, ainsi que celles dites de "compatibilité" sont pour ces cas satisfaites.

.../

Par contre, les problèmes d'un état de contraintes en trois dimensions se prêtent moins facilement à des solutions découlant des méthodes de la théorie classique.

Nous estimons que les simplifications de la théorie de l'élasticité classique, dues à l'introduction d'un système de coordonnées cartésiennes, n'admettent qu'un nombre restreint de fonctions répondant aux conditions des problèmes posés.

L'emploi de la géométrie de Riemann nous paraît plus indiqué, puisqu'elle est plus générale et exclut ainsi le privilège d'un système cartésien par rapport à d'autres.

Par ailleurs, cette géométrie permet d'adjoindre un système de coordonnées liées à un élément de matière pendant sa déformation.

Avec l'emploi de la géométrie de Riemann, notre but est d'éliminer l'introduction d'hypothèses arbitraites qui paraissent naturelles dans un système cartésien, mais nullement évidentes dans un autre système.

L'introduction de la géométrie différentielle absolue (analyse tensorielle) pour la création d'invariants, est susceptible d'ouvrir de nouvelles voies vers l'unicité de la théorie et de nous fournir ainsi les moyens de trouver les liens unissant la théorie de l'élasticité à l'ensemble de la physique mathématique.

L'outillage mathématique que nous employons dans cette étude, le calcul tensoriel, a servi au début du siècle à unifier la physique mathématique, c'est-à-dire relier les phénomènes optiques, électromagnétiques et gravitationnels à celle-ci.

Nous estimons que cette tâche appliquée à la théorie de l'élasticité, peut être considérée comme réussie, vus les résultats de notre étude.

.../

Il est facile de se rendre compte que les équations différentielles de la théorie de l'élasticité classique sont incluses dans notre étude comme équations soumises à des simplifications d'un ensemble plus large d'équations aux dérivées partielles.

Nous espérons que ces nouvelles équations de base permettront dans l'avenir d'examiner l'une ou l'autre des hypothèses, lesquelles peuvent être incompatibles avec les principes plus larges de la géométrie et de la mécanique (à condition de vouloir faire une distinction entre ces deux disciplines) .

Ainsi, on disposera également de critères plus puissants pour prendre, en pleine connaissance, des décisions permettant de négliger un terme quelconque d'une équation comme valeur d'ordre de grandeur secondaire.

Voici donc un aperçu des principes et de la méthode que nous employons, suivi d'une confrontation de nos résultats avec les équations de base de la théorie de l'élasticité classique :

A. EQUATIONS de BASE d'une THEORIE de l'ELASTICITE dans un ESPACE de RIEMANN

I). Nous définissons la contrainte -le tenseur de contraintes dit tenseur de tension- comme densité tensorielle d'une forme extérieure (voir premier chapitre).

La définition classique de la contrainte est artificielle. Elle ne permet pas de présenter la contrainte autrement qu'en tant que grandeur scalaire.

Ce n'est qu'après l'introduction d'un système de coordonnées qu'il devient possible de distinguer entre contraintes normales et tangentielles, donc après l'introduction d'une orientation.

Ces distinctions, contraintes normales et contraintes tangentielles, classent par elles-mêmes les composantes en deux groupes apparemment séparés et cela a paru jusqu'à présent tellement naturel que l'on emploie des notations distinctes comme σ ou τ ou n et t pour bien souligner cette différence.

La contrainte $T_{i,jk}$, comme nous la définissons au premier chapitre des équations de base, est un tenseur; les σ et τ de l'élasticité classique, par contre, sont des scalaires ayant reçu une orientation (des vecteurs orientés selon un système euclidien octogonal).

II). Selon le chapitre 4 de notre étude, nous constaterons, lorsque nous introduirons les composantes co- et contravariantes du tenseur métrique g_{ij} et g^{ij} , que leur produit avec les composantes contravariantes et covariantes du tenseur de contraintes représente la densité scalaire de l'énergie.

Il nous est possible, grâce au caractère invariant de cette densité d'introduire toutes les formes de l'énergie, ce qui permettra par exemple d'établir une théorie générale de la transformation d'énergie électrique en énergie élastique (problème du " Sonar ").

III). Les composantes du tenseur de déformation dans le cadre de la théorie de l'élasticité classique sont aussi séparées en deux classes d'une façon analogue aux contraintes σ et τ , au point de ne voir aucune parenté entre allongements positifs ou négatifs ε_{ii} et les angles de déformation γ_{jk} , à part le fait qu'ils sont des dérivées des coordonnées.

Nous présenterons au chapitre 2 le tenseur de déformation comme tenseur métrique covariant g_{ij} d'un système de coordonnées participant aux déformations.

Les conséquences de cette identification seront les suivantes :

la mise en cause

1. soit de l'emploi de tout repère cartésien ou plus généralement euclidien, car le tenseur métrique pour de tels espaces n'est pas une fonction, mais une constante;

2. soit des équations de compatibilité (voir chapitre 3).

IV). L'utilité d'une théorie de l'élasticité réside dans l'établissement d'une relation entre le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte.

Dans la théorie classique ces relations sont en fait assurées par la loi de HOOKE. Nous présenterons et discuterons au chapitre 5 une mise en forme générale de cette loi. Dès lors, il nous apparaîtra impossible de maintenir cette " Loi de HOOKE ".

Les équations qui la représèntent :

$$e_{ij} = \frac{g_{ij}}{2} = \frac{(1+\nu)}{E} T_{ij} - \nu \frac{\delta_{ij}}{E} T$$ E étant le module de YOUNG

a) ne peuvent pas être généralisées pour un système non euclidien;

b) il est facile de se persuader que ces équations représentent les relations entre déformations et contraintes définies par la loi

.../

de HOOKE, car pour : $j = i$, $e_{ii} = \varepsilon_{ii}$ et $T_{ii} = \sigma_{ii}$, nous obtenons la relation bien connue entre allongements et contraintes normales dans l'espace à trois dimensions :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{ii} - \nu \sum_k \sigma_{kk}\right) \text{ avec } \delta_{ij} T = \sum_k \sigma_{kk}$$

et pour $i \neq j$. $\delta_{ij} = 0$ $g_{ij} = \gamma_{ij}$ $T_{ij} = \tau_{ij}$

$$\gamma_{ij} = \frac{2\,(1 + \nu)}{E} \tau_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$$

G étant le module de glissement ou cisaillement et ν le coefficient de Poisson.

On voit que si l'on introduit une proportionnalité entre déformations et contraintes, selon la loi de HOOKE, on est obligé d'introduire, pour transformer la matrice dont les éléments sont les composantes du tenseur contrainte en une matrice de déformation, trois différents facteurs constants ν, G et E, ce qui est contraire au principe de la transformation d'une matrice par multiplication de celle-ci par <u>une</u> constante.

Ce résultat ne nous étonne pas puisque σ et τ sont pour la théorie classique deux ensembles bien distincts de vecteurs, comme nous l'avons dit ci-dessus, réunis dans une matrice, puisqu'on veut que les éléments de cet ensemble soient les composantes d'un tenseur.

V). Si nous prenons en considération le diagramme d'essai à la traction d'une éprouvette de matière homogène supposée s'allonger linéairement, nous ne mesurons et ne pouvons à priori constater autre chose qu'une proportionnalité entre la force sollicitante et l'élongation :

$$\Delta l = kP = f\ (P)$$

De là, vouloir établir une loi (de HOOKE) entre allongement et contrainte - et cela par simple division de la variable force par une section constante appelée conventionnelle et de diviser simultanément la valeur $\Delta \ell$ de l'élongation par la longueur initiale ℓ pour obtenir $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \varepsilon$ l'allongement- nous paraît être un procédé parfaitement arbitraire.

La seule valeur qui nous paraisse avoir un sens est l'intégrale de la fonction $\Delta \ell = kP = f(P)$ dans l'intervalle du domaine élastique, car cette intégrale représente le travail élastique.

VI). En introduisant au chapitre 4 la densité d'énergie $g_{\ell i} T^{i\ell}$, nous trouverons par différentiation absolue de cette densité le théorème de HILBERT :

$$\text{div } T^{i\ell} = 0 \quad \text{et div } T_{i\ell} = 0$$

On voit que l'annulation des symboles de Christoffel dans ce système d'équation conduit aux équations bien connues d'équilibre du parallélépipède élémentaire de la théorie classique :

$$\partial_\ell T^{i\ell} = 0 \qquad \partial^\ell T_{i\ell} = 0$$

Ces équations paraissent donner raison au raisonnement classique dans un système cartésien,- or nous trouverons qu'en introduisant (chapitre 14) la condition de l'harmonicité (condition de de Donder), nous obtenons les mêmes équations sans pour autant conserver un espace euclidien pour la discussion de l'état d'équilibre du parallélépipède déformé.

.../

VII). Ce raisonnement nous amènera (voir chapitre 5) à l'introduction du tenseur contracté de courbure de RICCI-EINSTEIN et aux équations de EINSTEIN, la loi de HOOKE étant ainsi remplacée par ces dernières équations appliquées à un espace déformé V^3 (matière élastique).

VIII). Grâce à l'introduction de la condition de l'harmonicité, les coordonnées déformées deviennent des dérivées d'un potentiel élastique satisfaisant l'équation de LAPLACE, ce qui permet - par introduction de la variable temps - de rechercher les liens entre l'élasticité et la dynamique (vibrations élastiques), considérant l'état de la matière déformée comme état d'équilibre, stade final d'un processus se déroulant dans le temps.

IX). L'introduction de la condition de l'harmonicité dans les équations d'EINSTEIN nous fournira (chapitre 13) des équations équivalentes à l'équation différentielle de la fonction d'AIRY représentant la contrainte (composantes du tenseur de contrainte) comme une dérivée partielle d'une fonction potentielle.

Si nous examinons la fonction d'AIRY, nous ne pouvons que faire la même constatation comme beaucoup d'autres avant nous :

C'est un outillage mathématique impuissant à répondre aux problèmes de l'état des contraintes dans un espace à trois dimensions.

.../

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}$, où F est

la fonction d'AIRY, c'est tout ce que nous obtenons en utilisant cette fonction. Elle ne répond qu'à des problèmes d'un état de contraintes dit " plane ".

Selon sa structure, la fonction F d'AIRY est un tenseur de première valence et non un scalaire.

Son apparence dans l'équation :

$\nabla^4 F = 0$ de faux potentiel est trompeuse.

X). En examinant les équations de compatibilité de la théorie classique, en observant la condition de l'harmonicité, nous constaterons que ces six équations ne seront que des définitions des symboles de Christoffel de première espèce ou des sommes de leurs dérivées (chapitre 11) :

$$(\partial_k \gamma_{ij} + \partial_j \gamma_{ki} - \partial_i \gamma_{jk}) = 2\,\Gamma_{i,jk}$$

et

$$\partial_{jj}\,\varepsilon_{ii} + \partial_{ii}\,\varepsilon_{jj} = \partial_i\,\Gamma_{i,ij} + \partial_j\,\Gamma_{j,ii}$$

Il nous paraît intéressant de signaler ici que ces équations ne représentent pas d'une façon explicite l'intégrabilité. On doit donc définir l'espace et préciser que l'espace est une variété riemannienne, ce qui équivaut pour les vecteurs unitaires e_i (ou e^i), attribués aux coordonnées déformées, d'être soumis à la condition :

$$(\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l)\, e_i = 0 \quad \text{ou} \quad \text{rot}\ e_i = 0$$

Avec la condition de l'harmonicité on obtient :

$$\partial_l \Gamma^j_{ik} = \partial_k \Gamma^j_{il} \quad \text{ou}$$

$$\partial_{ml} u - \partial_{lm} u = \text{rot } u = 0$$

En introduisant même la variable temps, l'espace reste un espace sans torsion et finalement on obtient la relation :

$\partial_{kil} = \partial_{lik}$ entre opérateurs appliqués à une fonction scalaire, la permutabilité des dérivations successives d'une fonction scalaire (potentiel).

On peut aussi écrire d'une façon absolument équivalente :

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \qquad \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = 0$$

B. "<u>EQUATIONS FONDAMENTALES</u>
<u>D'UNE THEORIE GENERALISEE des STRUCTURES ELASTIQUES</u> "

Il nous paraît bien naturel d'examiner les conséquences des modifications que nous avons apportées à la théorie de l'élasticité dans ce domaine.

Nous obtenons comme résultats :

.../

I). Que le théorème connu sous le nom de BETTI-MAXWELL n'est qu'une conséquence de l'existence d'un potentiel élastique :

$$y^{ik} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_i \partial P_k} = \partial^k \partial^i E = \partial^{ik} E$$

$$y^{ki} = \frac{\partial^2 E}{\partial P_k \partial P_i} = \partial^i \partial^k E = \partial^{ki} E$$

$$y^{ki} = y^{ik} \qquad y^{ki} - y^{ik} = \text{rot } y = \text{rot } E = 0$$

où E, y est respectivement la fonction scalaire (potentiel élastique) et P_i et P_k les composantes du vecteur-force.

II). Par l'introduction d'une constante β (à ne pas confondre avec la fonction $\beta = \sqrt{I - (\frac{v}{c})^2}$ de la théorie de la relativité), nous sommes en mesure de raisonner dans un espace rendu, grâce à cette constante, complétement métrique, comme cela a déjà été dit ci-dessus.

Cette constante métrique permet une interprétation physique des composantes contravariantes du teneur métrique :

$$g^{jk} = \frac{y^{jk}}{\beta} \qquad \text{où} \qquad y^{jk} = \beta g^{jk}$$ est le

tenseur d'influence, comme nous l'appellerons.

Le théorème de Betti-Maxwell $y^{kj} = y^{jk}$ n'est alors qu'une simple conséquence de la symétrie du tenseur métrique.

Nous avons appelé l'ensemble des composantes contravariantes y^{jk} , composantes du tenseur d'influence, car en effet il représente l'influence d'une force appliquée au point k sur la déformation au point j , y^j étant un vecteur-déplacement.

III). De notre définition de dérivée contravariante, $\partial^i E = y^{ik} \partial_k E = y^i$,

$y^{ik} \partial_k = \partial^i$ étant l'opérateur de la dérivée de Pfaff ; il en résulte que le théorème de Castigliano n'est qu'une différentiation contravariante d'une fonction potentielle.

On voit ensuite que le théorème de Ménabréa n'est qu'une annulation d'un certain nombre de composantes du vecteur-déplacement :

$$\frac{\partial E}{\partial P_i} = \partial^i E = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial U}{\partial P_i} = \partial^i U = 0 \quad \Rightarrow \quad y^i = 0$$

correspondant au choix des points fixes d'une structure élastique équivalent à une définition d'un sous-ensemble de points de repérage d'un système considérés comme non soumis à des déplacements.

IV). En définissant l'élément de l'angle de déformation par l'équation :

$$d\,\theta^i_{\cdot k} y^k = dy^i$$

où dy^i est le déplacement infinitésimal du à une rotation infinitésimale $d\theta^i_{\cdot k}$ élément d'angle de déformation, que nous ne confondons pas à priori - comme c'est coutume en résistance de matériaux - avec la tangente à la déformée en ce point avec $d\theta^i_{\cdot k} = \Gamma_k{}^i{}_\ell \, dy^\ell$. nous démontrerons que l'égalité : $\Gamma_k{}^i{}_\ell = \Gamma_\ell{}^i{}_k$ est un autre aspect du théorème de Betti-Maxwell.

V). En définissant l'élément du moment statique par une forme extérieure :

$$d\,M_{l.}^{\ k} = \varepsilon_{l.}^{\ k}\ dP_l\ dx^k$$

nous aboutirons à la fonction θ_{km}^{il}, que nous appellerons fonction de rigidité angulaire. Ce tenseur représente la raideur élastique au point k d'une structure envers une rotation en direction i sous l'influence d'un moment statique $M_{l.}^{\ m}$

VI). Nous retrouverons finalement les équations résultant du principe des travaux virtuels, connues sous le nom des équations de MUELLER-BRESLAU sous la forme la plus générale :

$$\partial^m E = y^m = 2\,\partial^m \int \theta_{lj}^{ik}\, M_{k.}^{\ l}\, dM_{i.}^{\ j} = y^m$$

et

$$\partial_m E = 2\,U_m = 2\,\partial_m \int \theta_{lj}^{ik}\, M_{k.}^{\ l}\, dM_{i.}^{\ j} = P_m$$

au chapitre " La fonction de rigidité et le tenseur de Riemann-Christoffel ".

Pour clore cette discussion, nous signalons que nous n'avons nullement l'intention de sous-estimer le mérite qu'ont eu certains auteurs d'avoir présenté dans leurs ouvrages sur le calcul tensoriel, comme exemples d'applications de ce calcul, des contraintes ou déformations élastiques comme parties d'un ensemble tensoriel.

Mais la théorie de l'élasticité n'est pas exclusivement un sujet parmi

d'autres servant à présenter un outillage mathématique relativement récent, mais une science dont l'importance devient de plus en plus grandissante du fait de problèmes de plus en plus complexes posés par les ouvrages d'art comme, par exemple, les constructions de réservoirs de grandes dimensions, des formes architecturales complexes et du besoin d'économiser les matériaux de construction sans sacrifier la sécurité des réalisations.

En ce qui concerne l'outillage mathématique dont nous faisons usage et des études concernant la théorie de l'élasticité classique, nous donnons une liste de référence en annexe à notre étude, en nous excusant auprès des auteurs et surtout auprès des lecteurs, si elle n'est pas complète.

Les auteurs sont cités par ordre alphabétique.

DEFINITIONS et SYMBOLISATION

Nous donnons ci-dessous, d'abord des définitions, puis ensuite un aperçu succinct avec quelques explications, de l'outillage mathématique et symbolique nécessaire afin d'atteindre le but que nous nous sommes fixés pour cette étude.

VECTEUR

Nous définissons un vecteur $\vec{y}$ comme élément d'un ensemble possédant une valeur numérique et une orientation dans l'espace (par rapport à une base servant de repère dans l'espace).

VECTEUR UNITAIRE

Au cas où la valeur numérique de ce vecteur est considérée comme unité, nous appelons un tel vecteur : un vecteur unitaire $\vec{e}$.

Nous pouvons ainsi écrire : $\vec{y} = y\vec{e}$, y étant la valeur numérique (partie scalaire) du vecteur.

BASE ou REPÈRE

Nous appelons base ou repère, un ensemble de vecteurs unitaires d'orientation distincte et indépendant l'un de l'autre. Leur nombre est égal aux dimensions de l'espace : $l = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ où n est la dimension de l'espace.

.../

Nous notons pour un élément d'un vecteur $d\vec{P}$:

$$d\vec{P} = \vec{e}_j \, dP^j = dP_k \, \vec{e}^{\,k} \quad \text{avec} \quad j \quad \text{et} \quad k \quad \text{comme indices muets.}$$

Nous disons que dP^j sont les composantes contravariantes et dP_k les composantes covariantes du vecteur élémentaire dP et $\vec{e}_j$ et $\vec{e}^{\,k}$ les composantes co- et contravariantes du vecteur unitaire.

Par la suite, nous ne parlerons plus des composantes mais des vecteurs et nous dirons : vecteur covariant (tenseur de valence 1, covariant) et vecteur contravariant (tenseur de valence 1, contravariant) .

Nous assimilons les vecteurs covariants aux matrices-lignes et les vecteurs contravariants aux matrices-colonnes.

Remarquons ici que toutes les formes linéaires ou quadratiques dont nous allons faire usage dans cette étude, sont associées à des matrices et nous employons, en conséquence, une écriture qui permet de tenir compte de cette particularité d'une façon symbolique car, même si par exemple le produit scalaire entre composantes co- et contravariantes est par définition commutatif, nous considérons que ce produit est un produit d'un vecteur-ligne et d'un vecteur-colonne et ne peut être noté autrement que sous l'aspect d'un produit matriciel (matrice-ligne x matrice-colonne), le premier indice indiquant la ligne et le deuxième la colonne.

La position inférieure est réservée aux indices covariants et la position supérieure aux indices contravariants.

..../

L'emploi des repères cartésiens est exclu. Nous considérons (voir objections exprimées à ce sujet, au chapitre : " Exposé de la METHODE et DISCUSSION des RESULTATS ") , le système cartésien exclusivement comme support pour la transformation des équations en vue de leurs applications à des problèmes particuliers, ce qui dépasse le cadre de cette étude.

Nous employons, sans restriction et sans exception, la convention d'Einstein pour la sommation sur les indices muets.

Si nous ne voulons pas effectuer une sommation, nous utiliserons le jeu vertical d'indices pour le "blocage", que nous examinerons ci-dessous.

L'espace dans lequel nous raisonnons est un espace métrique sans restriction.

Pour exprimer la dualité de deux systèmes de repérage par rapport à un invariant et pour la transformation des tenseurs, il nous suffit d'introduire les lettres des alphabets latin et grec pour les indices de l'un ou de l'autre système.

La transposition d'une matrice peut s'exprimer par un jeu horizontal d'indices.

.../

Du point de vue terminologique, nous distinguons quatre ensembles de symboles :

1. signes de base
2. opérateurs symboliques
3. indices
4. opérateurs arithmétiques.

1. <u>Les signes de base</u> symbolisent sans exception des fonctions scalaires ou constantes :

E, M, Θ, Ω, u, g, x, y, T, R, U, G, Φ, Γ, ρ, e, s et σ
G.

Parfois, pour permettre un raisonnement plus général, nous choisirons pour la représentation d'une fonction scalaire un cercle $\bigcirc$.

2. Nous employons comme <u>opérateurs symboliques</u> :

d, ∂, ∇	comme opérateur de dérivation, ensuite :
δ, ε	munis de deux indices symboles, du Kronecker et du spin, et finalement :
$\rightarrow$, $\overline{}$	la flèche horizontale ou barre horizontale au-dessus d'un signe de base avec moyen de déplacement horizontal. Ce déplacement est considéré comme transformation d'un symbole d'un signe de base ou, autrement dit, d'un scalaire en vecteur. Nous présentons à la fin de ce chapitre des exemples d'utilisation.

.../

3. Les indices sont :

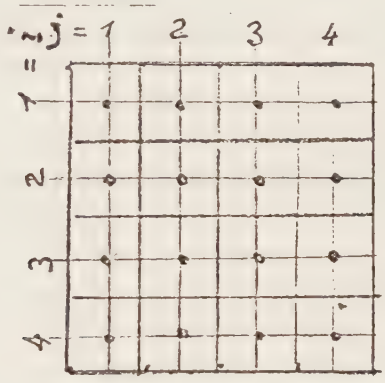
a. les lettres minuscules de l'alphabet latin :

i, j, k, l, m, n, correspondant aux variables entières

par analogie aux lettres :

I, J, K, L, M, N, du langage FORTRAN, car nous considérons en quelque sorte comme coordonnées les indices indiquant la position d'une composante d'un tenseur par rapport à la matrice dont il devient un élément et parce que ces indices ne peuvent être que des nombres entiers.

Nous les notons, si le signe de base possède deux indices, en formant ainsi un élément d'un ensemble matriciel selon la règle ligne-colonne :



Exemple :

a_{ij}, $a_{i\cdot}^{\ j}$, $a_{\cdot j}^{\ i}$, a^{ij} sont des composantes bien différentes d'un tenseur, mais elles occupent la même position en tant qu'éléments de la matrice carrée, qui constitue en quelque sorte un champ discontinu ou discret.

Toutes les fois qu'il est besoin d'employer d'autres lettres minuscules, nous ajoutons r et s .

.../

b. <u>les lettres minuscules de l'alphabet grec</u> :

λ, μ, ν et α, β

puisque nous ne pouvons pas obtenir une analogie parfaite avec les lettres de l'alphabet latin, étant donné la particularité de l'écriture de l'alphabet grec.

c. <u>les points ou astérisques de position</u> sont considérés comme indices provisoires réservant, lors d'une opération, la place d'un indice.

Les astérisques sont des symboles de réserve pour les indices muets et ne doivent apparaître que par deux et en position dualement opposée.

Exemples : $a_{i*}\, b^{*}_{.j} = A_{ij}$

Nous ne précisons pas ici à quel repère appartient l'indice muet.

$$O_{i*}\, O^{*}_{.j} = O_{ij}$$

L'union de ces deux ensembles s'effectue avec la disparition des astérisques par contraction sur l'indice muet et l'indice ligne i, dans notre cas, occupe la position du point.

.../

Chaque signe de base ou opérateur symbolique, à l'exception de la flèche (ou barre) , peut être muni soit d'un ou même de plusieurs indices. Un opérateur devient ainsi lui-même, en quelque sorte, un vecteur ou tenseur symbolique grâce aux indices :

Exemple : $\frac{\partial E}{\partial x^i} = \partial_i E \quad \partial_i E = E_i = P_i$

Nous plaçons, sans exception, les indices derrière le signe de base, soit en position basse (covariante), soit en position haute (contravariante) :

$$\frac{\partial E}{\partial P_i} = \partial^i E \quad = \partial^i (E) = E^i = y^i$$

d. <u>Les opérateurs arithmétiques</u> sont réduits au minimum nécessaire pour exprimer sans équivoque des opérations classiques :

$$+ , - , ( ) , [\ ] , \{ \} , \wedge , = , \otimes , x$$

Pour un signe de base ou une réunion d'un opérateur symbolique et d'un signe de base muni d'un seul indice, donc des composantes d'un vecteur, la position basse (covariance) indiquera que les composantes sont les éléments d'une ligne,- et la position haute (contravariance) que les composantes forment un ensemble colonne.

Exemple : $\partial_i E = E_i$ est un vecteur ligne

$d x^i$ est un vecteur colonne

Le produit s'écrira : $\partial_i E \, d x^i$

$$\partial_i (E) \, dx^i = E_i \, dx^i = E_* \, dx^* = 0_* \, d \, 0^* = d \, 0$$

Autre exemple : $\partial_i u = u_i \quad \partial^j u = u^j$

Le produit s'écrit, même s'il était commutatif :

$$\partial_i u \, \partial^j u = u_i u^j = u_{i.}^{\ j}$$

Le résultat est un tenseur mixte, dont les éléments forment une matrice carrée :

$$\begin{bmatrix} u_{1.}^{\ 1} & u_{1.}^{\ 2} & u_{1.}^{\ 3} \\ u_{2.}^{\ 1} & u_{2.}^{\ 2} & u_{2.}^{\ 3} \\ u_{3.}^{\ 1} & u_{3.}^{\ 2} & u_{3.}^{\ 3} \end{bmatrix}$$

En tenant compte de la convention d'Einstein sur les indices muets, nous trouvons pour $i=j$

$$u_i u^i = u_{i.}^{\ i} = u_1 u^1 + u_2 u^2 + u_3 u^3 = u_* \, u^* = u$$

la trace de la matrice, donc l'invariant .

La commutativité s'exprime par l'équation :

$$u_i u^j = u_j u^i$$

Mais, le produit effectué, nous avons d'autres moyens d'expression :

$u_{i.}^{\ j} = u^i_{.j}$ jeu vertical d'indices

$u_{i.}^{\ j} = u^j_{.i}$ jeu horizontal d'indices

C'est le jeu horizontal d'indices qui exprime, non seulement la commutativité, mais aussi la symétrie, car $u^j_{.i}$ est la transposée de $u_{i.}^{\ j}$ et, au jeu horizontal, correspond une transposition ligne-colonne.

<u>Une matrice (un tenseur) est symétrique si elle reste invariante par rapport au jeu horizontal des indices.</u>

Ci-dessous, nous présentons deux exemples :

ε est le symbole- spin ou signe de base d'une matrice unité antisymétrique, obligatoirement accompagné de deux indices.

$$\varepsilon^{i}_{.j} = o \quad \text{pour } i = j$$

$$\varepsilon_{i.}^{j} = 1 \quad \text{pour } i < j \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \simeq \varepsilon_{i.}^{j} \quad \text{pour 3 dimensions.}$$

$$\varepsilon_{i.}^{j} = -1 \quad \text{pour } i > j$$

Il en résulte que le jeu vertical des indices n'apporte aucun changement :

$$\varepsilon_{i.}^{j} = \varepsilon^{i}_{.j}$$

Mais nous trouvons, par jeu horizontal (transposition)

$$\varepsilon^{j}_{.i} = -\varepsilon_{i.}^{j} = -\varepsilon^{i}_{.j}$$

Autre exemple :

Nous admettons comme donné le produit : $\varepsilon_{i.}^{j}\, x^{i} x_{j}$ ou $x^{i}\, \varepsilon_{i.}^{j} x_{j}$

supposé obtenu lors de quelques opérations effectuées sur une expression.

Nous effectuons d'abord le regroupement en plaçant l'opérateur sur la gauche du produit :

$$x^{i}\, \varepsilon_{i.}^{j} x_{j} = \varepsilon_{i.}^{j} x^{i} x_{j}$$

et selon l'ordre ligne-colonne :

$$\varepsilon_{i.}^{\ j} x^i x_j = \varepsilon_{i.}^{\ j} x_j x^i \qquad x_j \text{ - ligne}$$

$$x^i \text{ - colonne}$$

Nous appelons ce procédé un regroupement.

Il s'agit donc d'un produit de composantes co- et contravariantes du même vecteur (même signe de base) :

$$x_j x^i = x_{j.}^{\ i}$$

Nous trouvons ainsi : $\varepsilon_{i.}^{\ j} x_j x^i$

Le symbole-spin étant opérateur symbolique, il ne s'agit pas de toute évidence, en ce qui concerne les indices, d'indices muets et, ainsi, d'un produit scalaire. D'autre part, la sommation d'Einstein est obligatoire, d'autant que les deux indices j se trouvent en position duale.

Nous profitons de l'invariance du symbole-spin par rapport au jeu vertical d'indices, pour écrire : $\varepsilon_{i.}^{\ j} = \varepsilon^{j}_{.i}$

$\varepsilon_{i.}^{\ j} x_{j.}^{\ i} = \varepsilon^{i}_{.j} x_{j.}^{\ i}$ L'expression $\varepsilon^{i}_{.j} x_{j.}^{\ i}$ n'est pas une somme.

Nous appelons cette opération un "blocage d'indices".

.../

Nous nous posons maintenant la question : par quel procédé a pu être obtenu ce produit, ou plutôt le problème de la décomposition en facteurs :

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}^j = \varepsilon^{i}_{.j} = \vec{e}^i \wedge \vec{e}_j$$

$$\varepsilon_{i.}^{j}\, x_j x^i = \vec{e}_i \wedge \vec{e}^j\, x_j x^i = \vec{e}_i x^i \wedge x_j \vec{e}^j$$

Ainsi, le produit $x_j\, x^i$ est une matrice formée par produit matriciel des deux vecteurs. Ce n'est que grâce à l'opérateur-spin que les éléments d'une telle matrice deviennent composantes d'un tenseur mixte antisymétrique.

$$\varepsilon^{i}_{.j} x_j x^i = - \varepsilon_{j.}^{i} x^i x_j = - \varepsilon_{j.}^{i} x_j x^i$$

$$\varepsilon^{i}_{.j} x_j x^i = \varepsilon^{i}_{.j} x_{j.}^{i} = M^{i}_{.j}$$

$$\varepsilon_{J.}^{i} x_j x^i = \varepsilon_{J.}^{i} x_{j.}^{i} = M_{j.}^{i}$$

$$M^{i}_{.j} = - M_{j.}^{i}$$

<u>Nous avons ainsi une invariance d'écriture par rapport au symbole arithmétique d'égalité.</u>

.../

Autre exemple : donné le produit $x^i \vec{e}^j x_j \vec{e}_i$

regroupement : $\vec{e}_i$ avec x^i , x_j avec $\vec{e}^j$

et par ensembles : $\vec{e}_i \vec{e}^j x_j x^i$

Il s'agit d'un produit de deux vecteurs :

$$\vec{e}_i \vec{e}^j = \bar{\delta}_{i.}^{\ j} \quad \text{et} \quad x_j x^i_{.} = x_{j.}^{\ i}$$

$\bar{\delta}_{i.}^{\ j}$ est le symbole de Kronecker, mais aussi élément d'une matrice-unité.

$$\delta_{i.}^{\ j} = 1 \text{ pour } i = j$$

$$\delta_{i.}^{\ j} = o \text{ pour } i \neq j$$

Si nous écrivons $\delta_{i.}^{\ j} x_{j.}^{\ i}$, nous devons - selon la convention d'Einstein - effectuer d'abord une sommation sur l'indice muet j , effectuant ainsi le produit matriciel selon la règle ligne-colonne ou, en langage de calcul tensoriel, une contraction :

$$\delta_{i.}^{\ j} x_{j.}^{\ i} = \delta_{i.}^{\ *} x_{*.}^{\ i} = \delta_{i.}^{\ \cdot} x^i_{.} = x_{i.}^{\ i} = x_{.}^{\ \cdot} = x$$

$$x = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \ldots\ldots\ldots$$

x est donc la trace ou la fonction scalaire ainsi obtenue.

Si nous voulons bloquer la sommation, nous écrivons :
au lieu de $\delta_{i.}^{\ j} x_{j.} x^i$, $\delta^i_{.j} x_{j.}^{\ i}$, le résultat ainsi obtenu est un élément d'une matrice-diagonale ou, si besoin est, nous dirons que

.../

l'ensemble représente une matrice-diagonale.

$$\delta^{i}_{.j} \; 0^{i}_{j.} = 0^{i}_{.j}$$

selon le raisonnement que la valeur absolue $\left| \delta^{i}_{.j} \right| = 1$ et que, comme dans le cas de l'exemple précédent, l'ensemble sur lequel l'opérateur symbolique opère, adopte les indices de l'opérateur :

$$0^{i}_{.j} = o \quad \text{pour} \quad i \neq j \qquad 0^{i}_{.i} = \overset{*}{0}_{.*} = 0$$

FORMES
LINÉAIRES et QUADRATIQUES
de l'ÉNERGIE

AVERTISSEMENT

Avant d'aborder cette partie de notre étude, nous voulons avertir le lecteur que nous choisissons comme point de départ pour nos discussions, un raisonnement et une notation classique en remplaçant progressivement l'écriture classique par des notations tensorielles en développant aussi d'une façon progressive l'application d'un raisonnement mathématique que nous appellons l'analyse indicielle.

Nous donnons au premier chapitre la définition de l'élément infinitésimal de l'énergie sous une forme linéaire tout en admettant qu'il s'agit d'une fonction potentielle scalaire.

Soit E cette fonction et x,y,z ou u,v,w les coordonnées de deux systèmes de repérage. L'invariance de la fonction d'énergie peut alors être notée sous la forme :

$$E\ (x,y,z) = E\ (u,v,w) \quad \text{où} \quad x = x\ (u,v,w) \quad y = y\ (u,v,w) \quad z = z\ (u,v,w).$$

Mais nous pouvons aussi considérer ce scalaire comme fonction des forces selon les directions x,y,z, ou u,v,w :

$$dE\ (P_x,P_y,P_z) = dE\ (P_u,P_v,P_w) \quad \text{où} \quad P_x = P_x\ (P_u,P_v,P_w)$$

$$P_y = P_y\ (P_u,P_v,P_w) \quad P_z = P_z\ (P_u,P_v,P_w)$$

Nous examinerons par la suite les deux formes linéaires et les transformations qui en résultent quand on passe d'un système de repérage à l'autre.

Ce détour par un raisonnement classique nous permettera de mieux comprendre le mécanisme aussi bien du calcul tensoriel que de l'analyse indicielle auxquels cette façon d'analyser les équations résultantes nous amènent.

PREMIERE FORME LINEAIRE DE L'ELEMENT DE L'ENERGIE

Nous pouvons donc écrire :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz \qquad (1)$$

et nous notons la transformation entre les vecteurs colonnes :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw \qquad (2) \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}$$

Par substitution des équations (2) en (1) nous trouvons :

$$\begin{aligned} dE = &\left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) du + \\ &+ \left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right) dv + \qquad (3) \\ &+ \left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}\right) dw + \end{aligned}$$

Nous notons donc la différentielle totale sous la forme de multiplication ligne-colonne :

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial x} \; \frac{\partial E}{\partial y} \; \frac{\partial E}{\partial z}\right) \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

pour $x = y^1 \quad y = y^2 \quad z = y^3$ ou $y^i \; (i = 1,2,3)$

$u = x^1 \quad v = x^2 \quad w = x^3$ ou $x^\lambda \; (\lambda = 1,2,3)$

et nous pouvons noter :

$$(4) \qquad dE = \frac{\partial E}{\partial y^i} dy^i = \partial_i E dy^i$$

avec sommation sur l'indice muet i selon la convention d'Einstein.

.../...

Nous pouvons ensuite représenter le système d'équations (2) sous la forme :

$$(5) \quad dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \quad \text{avec sommation sur } \lambda$$

$$\text{ou} \quad dy^i = \partial_\lambda y^i \, dx^\lambda$$

et l'équation (3) :

$$(6) \quad dE = \frac{\partial E}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = \frac{\partial E}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = \partial_\lambda E \, dx^\lambda \quad \text{avec sommation sur } i \text{ et } \lambda$$

Il en résulte de (4) et (6) :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial y^i} dy^i = \frac{\partial E}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \quad \frac{\partial E}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda}\frac{\partial E}{\partial y^i} \quad (7)$$

ou $\quad \partial_\lambda E = E_\lambda = \partial_i E \, \partial_\lambda y^i = E_i \, y^i_{\cdot\lambda} = y_\lambda{}^i_{\cdot} E_i$

Nous trouvons :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = P_x = \partial_x E = E_x$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = P_y = \partial_y E = E_y$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = P_z = \partial_z E = E_z$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial E}{\partial y^i} = \partial_i E = E_i = P_i = O_i$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} = \partial_\lambda y^i = y^i_{\cdot\lambda}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$dE = \partial_i E \, \partial_\lambda y^i \, dx^\lambda = \partial_\lambda E \, dx^\lambda = E_\lambda \, dx^\lambda = E_i \, dy^i$$

$$dy^i = \partial_\lambda y^i dx^\lambda$$

$$\partial_i E \, \partial_\lambda y^i = \partial_\lambda y^i \partial_i E \quad \text{ou} \quad E_i \partial_\lambda y^i = \partial_\lambda y^i E_i$$

Nous introduisons maintenant une constante β : $\beta E = g = 2u$ nous obtenons alors :

$$\partial_i E = P_i = \frac{1}{\beta} \partial_i g = \frac{1}{\beta} g_i = \frac{2}{\beta} \partial_i u = \frac{2}{\beta} u_i$$

Par substitution de $\partial_i E = \frac{1}{\beta} g_i$ et $E = \frac{1}{\beta} g$ en $dE = \partial_i E \, \partial_\lambda y^i dx^\lambda$ nous trouvons

$$dg = \partial_\lambda y^i g_i dx^\lambda$$

SYSTEMES DE MESURE

Examinons maintenant les dimensions de l'énergie, ses dérivées et celles des opérateurs. Nous trouvons comme dimensions en admettant pour l'énergie E comme dimension :

$$\dim E = [\text{force x distance métrique}]$$

et $$\dim P_i = [\text{force}]$$

Il en résulte pour l'opérateur :

$$\partial_i = [\text{distance métrique}]^{-1}$$

Nous notons :

$$P_i = \frac{1}{\beta}\partial_i g = \frac{1}{\beta}\, g_i \qquad g_i = \partial_i g = \beta P_i$$

$$\text{force} = \frac{1}{\beta}\,[\text{distance métrique}]^{-1}\, g$$

$$\frac{1}{\beta}\, g = [\text{force x distance métrique}] = E$$

$$g = \beta\,[\text{force x distance métrique}] = \beta E$$

$$\partial_i E = [\text{distance métrique}]^{-1}\,[\text{force x distance métrique}]$$

$$\text{pour } \dim g = [\text{distance métrique}]^2$$

Nous obtenons :

$$\dim \partial_i g = \dim g_i = [\text{distance métrique}]^{-1}\,[\text{distance métrique}]^2 =$$
$$= [\text{distance métrique}]$$

$$\dim \beta = [\text{distance métrique}]\,[\text{force}]^{-1}$$

$$\dim \frac{1}{\beta} = [\text{force}]\,[\text{distance métrique}]^{-1}$$

et pour u :

$$\dim u = [\text{distance métrique}]^2$$

Si nous admettons, comme c'est le cas pour la théorie de relativité que l'énergie est une valeur sans dimensions nous trouvons :

$$\dim \partial_i E = [\text{distance métrique}]^{-1} = E_i = P_i$$

et avec $$\dim \partial_i g = \dim g_i = [\text{distance métrique}]$$

$$P_i = [\text{distance métrique}]^{-1} = \frac{1}{\beta}\,[\text{distance métrique}]$$

.../...

Il en résulte ainsi pour β : $\dim \beta = [\text{distance métrique}]^2$

et pour $\frac{1}{\beta} = [\text{distance métrique}]^{-2}$

On obtient ensuite :

$$\dim g = [\text{distance métrique}]^2$$

$$\dim P_i = [\text{distance métrique}]^{-1} = [\text{masse}]\ [\text{distance métrique}]\ [\text{temps}]^{-2} =$$

$$= \dim \partial_i E = [\text{distance métrique}]^{-1} E$$

$$[\text{masse}]\ [\text{distance métrique}]^2\ [\text{temps}]^{-2} = E$$

ou $[\text{masse}]\ [\text{temps}]^{-2}\ g = E$

Si on choisit pour $[\text{temps}]^{-2} g$ le carré de la vitesse de la lumière, on trouve :

$$\boxed{E = mc^2}$$

DEUXIEME FORME LINEAIRE DE L'ELEMENT DE L'ENERGIE

L'énergie étant une fonction scalaire nous pouvons, là, considérer comme fonction :

$$E = E(P_x, P_y, P_z) = E(E_i)$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial P_x} dP_x + \frac{\partial E}{\partial P_y} dP_y + \frac{\partial E}{\partial P_z} dP_z \qquad (I)$$

avec

$$dP_x = \frac{\partial Px}{\partial u} du + \frac{\partial Px}{\partial v} dv + \frac{\partial Px}{\partial w} dw$$

$$dP_y = \frac{\partial Py}{\partial u} du + \frac{\partial Py}{\partial v} dv + \frac{\partial Py}{\partial w} dw \qquad (II)$$

$$dP_z = \frac{\partial Pz}{\partial u} du + \frac{\partial Pz}{\partial v} dv + \frac{\partial Pz}{\partial w} dw$$

et avec $P_x = \partial_x E$ $P_y = \partial_y E$ $P_z = \partial_z E$ $P_i = \partial_i E$ nous pouvons représenter l'équation par la forme :

$$dE = \frac{\partial E}{\partial E_i} dP_i = \frac{\partial E}{\partial E_i} d(E_i)$$

Nous trouvons ensuite : $\frac{\partial E}{\partial E_i} = y^i$ ou $\partial^i E = y^i$

$$\boxed{dE = y^i dP_i = P_i dy^i}$$

Pour le système d'équations (II) nous trouvons par substitution :

$$dP_i = d(\partial_i E) = d(E_i) = \partial_\lambda (P_i) dx^\lambda = \partial_\lambda \partial_i E dx^\lambda = \partial_{i\lambda} E dx^\lambda$$

avec sommation sur l'indice muet : λ

Nous obtenons ensuite puisque E est une fonction potentielle :

$$dP_i = \partial_\lambda \partial_i E dx^\lambda = \partial_j \partial_i E dy^j$$

$$\partial_{\lambda i} E = \partial_{i\lambda} E \quad \text{ou} \quad \partial_{\lambda i} 0 = \partial_{i\lambda} 0$$

$$\partial_{\lambda i} E - \partial_{i\lambda} E = o$$

avec $\partial_{i\lambda} E = E_{i\lambda}$ et $\partial_{\lambda i} E = E_{\lambda i}$ par substitution en (I) nous obtenons

$$dE = \frac{\partial E}{\partial P_i} dP_i = \frac{\partial E}{\partial E_i} \partial_\lambda \partial_i E dx^\lambda = y^i \partial_\lambda \partial_i E dx^\lambda$$

L'invariance de dE nous fournit l'égalité :

$$dE = \partial_i E \partial_\lambda y^i dx^\lambda = y^i \partial_\lambda \partial_i E dx^\lambda$$

.../...

Il résulte l'équation :

$$\partial_i E \partial_\lambda y^i = y^i \partial_{\lambda i} E = \partial_\lambda E = E_\lambda = P_\lambda$$

$y^i \partial_{\lambda i} E$ est la dérivée de Plaff de la fonction scalaire E .

Nous trouvons pour les opérateurs :

$$\boxed{\partial_\lambda y^i \partial_i = y^i \partial_{\lambda i} = y^i \partial_{i\lambda} = \partial_\lambda}$$

En introduisant $y^i = \partial^i E$ nous trouvons ensuite :

$$\partial_\lambda y^i \partial_i = \partial_\lambda \partial^i E \partial_i = \partial^i E \partial_{i\lambda} = \partial_\lambda$$

et ensuite $\partial_\lambda y^i \partial_i E = \partial_\lambda E^i \partial_i E \partial_i E = \partial^i E \partial_{\lambda i} E = \partial^i E \partial_{i\lambda} E =$

$$\partial_\lambda y^i \partial_i E = \partial_{\lambda i} E^{\ i} E = \partial^i E_{\lambda i} E = \partial_\lambda E$$

$$\boxed{\partial_\lambda y_i \partial^i = \partial_\lambda y^i \partial_i = \partial_\lambda}$$

Ces dernières équations résument la contraction et le jeu vertical des indices muets.

Nous notons donc : $dy^i = \partial_\lambda y^i dx^\lambda = y^i_{\cdot\lambda} dx^\lambda$

$$dx^\lambda = \partial_j x^\lambda dy^j = x^\lambda_{\cdot j} dy^j$$

En substituant la deuxième équation dans la première nous obtenons :

$$dy^i = y^i_{\cdot\lambda} x^\lambda_{\cdot j} dy^j \quad \text{avec la condition}$$

$$y^i_{\cdot\lambda} x^\lambda_{\cdot j} = \begin{cases} 1 \text{ pour } j - i \\ o \text{ pour } j \neq i \end{cases}$$

ou $y^i_{\cdot\lambda} x^\lambda_{\cdot j} = g^i_{\cdot j} = \delta^i_{\cdot j}$

$y^i_{\cdot\lambda} x^\lambda_{\cdot j}$ est un produit matriciel et $g^i_{\cdot j}$ est la matrice unité.

Avec $y^i = \partial^i E$ on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} g^i_{\cdot j} &= \partial_\lambda \partial^i E \partial_j x^\lambda = E^i_{\cdot} x^\lambda_{\cdot j} = E^i_{\cdot\lambda} E^\lambda_{\cdot j} \\ g^\lambda_{\cdot\mu} &= \partial_j x^\lambda \partial_\mu \partial^j E = x^\lambda_{\cdot j} E^j_{\cdot\mu} = E^\lambda_{\cdot j} E^j_{\cdot\mu} \end{aligned}}$$

LES DEUX FORMES LINEAIRES DE L'ENERGIE

Posons $E = 2U$ avec $U = (u_i\ u^i)$

Dans ce cas l'élément linéaire de l'énergie peut être noté sous la forme linéaire :

$$\beta dE = 2\ d\ (u_i\ u^i) = 2\ (\ du_i\ u^i + u_i\ du^i)$$

D'autre part nous trouvons par le jeu vertical des indices : $du_i\ u^i = u_i du^i$

$$\beta\, dE = 4\ du_i u^i = 4\ u_i du^i = dg_i g^i = g_i dg^i$$

$$\beta\, dE = \frac{1}{2}\ (dg_i g^i + g_i dg^i) = \frac{1}{2}\ d(g_i g^i)$$

Mais puisque nous trouvons ensuite :

$dg_i g^i = g_i dg^i$ on obtient :

$$dg_i g^i + g_i dg^i = 2\ dg_i g^i = 2\ g_i dg^i$$

ou $\beta\ dE = \frac{1}{2}\ (2dg_i g^i) = dg_i g^i = \frac{1}{2}\ (2g_i dg^i) = g_i dg^i$

ou $dE = \frac{1}{\beta}\ dg_i g^i = \frac{1}{\beta}\ g_i dg^i = dP_i y^i = P_i dy^i$

FORMES LINEAIRES DE L'ENERGIE ET VECTEURS UNITAIRES

Soit $\vec{P}$ un vecteur-force et $\vec{dy}$ un élément infinitésimal du vecteur-déplacement. Nous pouvons alors noter :

$$dE = \vec{P}\,\vec{dy} \qquad P = \partial_i E\,\vec{e}^{\,i}$$

le vecteur $\vec{P}$ étant le gradient de la fonction scalaire E et $\vec{dy} = \vec{e}_j\,dy^j$

Nous pouvons alors représenter l'élément de l'énergie dE sous la forme linéaire :

$$dE = \partial_i E\,\vec{e}^{\,i}\,\vec{e}_j\,dy^j = \partial_i E\,dy^j\,\vec{e}_j\,\vec{e}^{\,i} = P_i\,dy^j\,\vec{e}_j\,\vec{e}^{\,i}$$

Ainsi nous trouvons :

$$\boxed{\vec{e}_j\,\vec{e}^{\,i} = g_{j\cdot}^{\;i} = \delta_{j\cdot}^{\;i}}$$

$$dE = P_i\,dy^j\,g_{j\cdot}^{\;i}$$

Si nous profitons du jeu vertical des indices nous obtenons :

$$\vec{e}_j\,\vec{e}_i = g_{ji} = \delta_{ji}$$

ou $\quad \vec{e}^{\,j}\,\vec{e}^{\,i} = g^{ji} = \delta^{ji}$

Or le tenseur unitaire ou tenseur de Kronecker covariant ou contravariant ne se confond avec le tenseur métrique que pour un système euclidien. D'autre part, on obtient un bloquage de la sommation sur les indices muets et l'expression :

$dE = P_i\,dy^j\,g_{j\cdot}^{\;i}$ perd son caractère de produit contracté.

DERIVEE D'UN VECTEUR-FORCE ET CONDITION DE L'HARMONICITE

Nous représentons le vecteur-force $\vec{P}$ comme gradient d'une fonction potentielle E :

$$\vec{P} = \partial_j E \vec{e}^j$$

Si nous effectuons maintenant une dérivation absolue de ce vecteur, nous obtenons :

$$\nabla \vec{P} = (d \partial_j E) \vec{e}^j + \partial_j E \nabla \vec{e}^j = \partial_{jk} E \, dy^k \vec{e}^j - \partial_j E \, d \Theta^j_{\cdot k} \vec{e}^k$$

En permuttant les indices j et k du deuxième terme il en résulte :

$$\nabla \vec{P} = \partial_{jk} E \, dy^k \vec{e}^j - \partial_k E \, d \Theta^k_{\cdot j} \vec{e}^j =$$

$$= (\partial_{jk} E \, dy^k - \partial_k E \, d \Theta^k_{\cdot j}) \vec{e}^j =$$

$$= (\partial_{jk} E \, dy^k - \partial_k E \, \Gamma^k_{\cdot jk} \, dy^k) \vec{e}^j =$$

$$= (\partial_{jk} E - \partial_k E \, \Gamma^k_{\cdot jk}) \, dy^k \vec{e}^j$$

Selon la condition de l'harmonicité il est $\Gamma^k_{\cdot jk} = \Gamma_j = o$

Il reste alors :

$$\nabla \vec{P} = \partial_{jk} E \, dy^k \vec{e}^j = d (\partial_j E) \vec{e}^j = dP_j \vec{e}^j$$

avec $\quad dP_j = \partial_{jk} E \, dy^k = \partial_k \partial_j E \, dy^k = dy_k \partial^k \partial_j E$

et avec $\quad E = \frac{1}{\beta} g$ on trouve :

$$\beta \, dP_j = dx_k \partial^k \partial_j g = dx_k \partial^k g_j = dx_k g^k_{\cdot j}$$

$$dg_j = g_{jk} \, dy^k = dy_k g^k_{\cdot j}$$

$$P_j = P_k g^k_{\cdot j} = \frac{g_k}{\beta} g^k_{\cdot j} = P_k g^k_{\cdot j}$$

et il en résulte :

$$\boxed{\partial^k g_j = g^k_{j\cdot} = \partial_j g^k = g^k_{\cdot j}}$$

DERIVEES SECONDES DE L'ENERGIE

Nous notons $g = \beta E = 2U = 2(u_i u^i)$ et il en résulte :

$$\frac{\beta}{2}\partial_\lambda E = u_{\lambda i} u^i = u_i u^i_{\cdot\lambda} = \frac{1}{2}(u_{\lambda i} u^i + u_i u^i_{\cdot\lambda}) = \frac{1}{2} g_\lambda$$

$$u_{\lambda i} u^i + u_i u^i_{\cdot\lambda} = g_\lambda = \beta\partial_\lambda E$$

On obtient ensuite :

$$\beta\partial_\mu\partial_\lambda E = \beta\partial_{\lambda\mu} E = \partial_\mu(u_{\lambda i} u^i) + \partial_\mu(u_i u^i_{\cdot\lambda}) =$$

$$= \partial_\mu u_{\lambda i} u^i + u_{\lambda i}\partial_\mu u^i + \partial_\mu u_i u^i_{\cdot\lambda} + u_i \partial_\mu u^i_{\cdot\lambda} =$$

$$= u_{\lambda i\mu} u^i + u_{\lambda i} u^i_{\cdot\mu} + u_{\mu i} u^i_{\cdot\lambda} + u_i u^i_{\cdot\lambda\mu} =$$

$$= u_{\lambda\mu i} u^i + u_i u^i_{\cdot\lambda\mu} + u_{\lambda i} u^i_{\cdot\mu} + u_{\mu i} u^i_{\cdot\lambda} = g_{\lambda\mu}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$g_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}\left[g_i \Gamma^i_{\lambda\mu} + \Gamma_{i,\lambda\mu} g^i\right] + \frac{1}{2}\partial_\lambda g_i g^i_{\cdot\mu}$$

et d'une manière analogue :

$$g_{jk} = \frac{1}{4}\left[g_\lambda \Gamma^\lambda_{jk} + \Gamma_{\lambda,jk} g^\lambda\right] + \frac{1}{2}\partial_j g_\lambda g^\lambda_{\cdot k}$$

Nous tirons ainsi la conclusion confirmée par le jeu d'indices :

$$u_{\lambda\mu i} u^i = u_i u^i_{\cdot\lambda\mu} = u_{\lambda i} u^i_{\cdot\mu} = u_{\mu i} u^i_{\cdot\lambda} = \frac{1}{4} g_{\lambda\mu}$$

$$u_{\lambda\mu i} u^i = \frac{1}{4}\Gamma_{i,\lambda\mu} g^i \qquad u_i u^i_{\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{4} g_i \Gamma^i_{\lambda\mu}$$

$$\Gamma_{i,\lambda\mu} = u_{\mu\lambda i} = \frac{1}{2} g_{i\lambda\mu} = \frac{1}{2}\partial_{i\lambda\mu} g = \frac{1}{2}\beta\partial_{i\lambda\mu} E$$

$$\Gamma^i_{\lambda\mu} = u^i_{\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^i_{\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{2}\partial_{\lambda\mu}\partial^i g = \frac{1}{2}\beta\partial_{\lambda\mu}\partial^i E$$

$\Gamma_{i,\lambda\mu}$ et $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ sont identiques aux symboles de Christoffel de première et deuxième espèce.

Nous trouvons d'autre part :

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}(g) = \partial_{\alpha\beta}(g_i g^i) = (\partial_{\alpha\beta} g_i) g^i + g_i \partial_{\alpha\beta} g^i =$$

$$= 2(\Gamma_{i,\alpha\beta} g^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} g_i) \qquad \Gamma_{i,\alpha\beta} g^i = \Gamma^i_{\alpha\beta} g_i = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}$$

.../...

Nous trouvons ensuite :

$$\beta\partial_\alpha E = \partial_\alpha g = g_\alpha = 2\, u_{\alpha i} u^i = 2\, u_i u^i_{\cdot\,\alpha}$$

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\beta g_\alpha = 2\,(\partial_\beta u_{\alpha i}) u^i + 2\, u_{\alpha i} u^i_{\cdot\,\beta} =$$

$$= g_{i\alpha\beta}\, u^i + g_{\alpha i} u^i_{\cdot\,\beta} = \frac{1}{2} g_{i\alpha\beta}\, g^i + \frac{1}{2} g_{\alpha i} g^i_{\cdot\,\beta} =$$

$$g_{\alpha\beta} = \Gamma_{i\alpha\beta}\, g^i + \frac{1}{2} g_{\alpha i} g^i_{\cdot\,\beta} =$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha i} g^i_{\cdot\,\beta}$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = g_{\alpha i} g^i_{\cdot\,\beta}}$$

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}(g) = \beta_{\beta\alpha} E = \beta\partial_{\alpha\beta} E = g_{\beta\alpha}$$

Il en résulte :

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = g_{\alpha i} g^i_{\cdot\,\beta} = g_{\beta i} g^i_{\cdot\,\alpha}}$$

Les composantes d'un tenseur métrique peuvent être considérées comme éléments d'une matrice-produit de deux matrices dont les éléments sont:

$$g_{\alpha i} \text{ et } g^i_{\cdot\,\beta} \quad \text{ou} \quad g_{\beta i} \text{ et } g^i_{\cdot\,\alpha}$$

La convention d'Einstein sur les indices muets reste valable .

FORMES QUADRATIQUES SCALAIRES

Nous admettons maintenant qu'aux vecteurs co/et contravariants y_i et y^i correspondent dans un système quelconque des vecteurs co/et contravariants x_λ et x^λ

Nous écrivons $dy^k = \partial_\mu y^k dx^\mu = dx_\mu \partial^\mu y^k$

et pour un élément de force : $dP_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = dx_\lambda \partial^\lambda P_k$

avec $y^k = g^k$ et $P_k = \frac{1}{\beta} g_k$ nous pouvons noter :

$$dg^k = \partial^\mu g^k dx_\mu = dx_\mu g^{\mu k}$$

$$dg_k = \partial^\lambda g_k dx_\lambda = dx_\lambda g_{k.}^{\ \lambda}$$

On obtient comme produit scalaire :

$$dg_k dg^k = g_{k.}^{\ \lambda} g^{k\mu} dx_\lambda dx_\mu = g_{\cdot k}^{\lambda} g^{k\mu} dx_\lambda dx_\mu =$$

$$= \beta dE = \partial^\mu \partial^\lambda g dx_\lambda dx_\mu = dx_\mu dx_\lambda g^{\lambda\mu} = dg$$

D'autre part nous pouvons écrire :

$$dg^k = \partial_\mu g^k dx^\mu = g_{\cdot\mu}^{k} dx^\mu$$

$$dg_k = \partial_\lambda g_k dx^\lambda = g_{k\lambda} dx^\lambda$$

$$dg_k dg^k = g_{k\lambda} g_{\cdot\mu}^{k} dx^\lambda dx^\mu = g_{\lambda k} g_{\cdot\mu}^{k} dx^\lambda dx^\mu =$$

$$= \beta dE = \partial_\lambda \partial_\mu g dx^\lambda dx^\mu = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu = (d\sigma)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{\lambda\mu} &= g_{\lambda i} g_{\cdot\mu}^{i} = g_{\mu\lambda} = g_{\mu i} g_{\cdot\lambda}^{i} \\ g^{\lambda\mu} &= g_{\cdot k}^{\lambda} g^{k\mu} = g^{\mu\lambda} = g_{\cdot k}^{\mu} g^{k\lambda} \end{aligned}}$$

$$\partial^j E = \frac{\partial E}{\partial P_j} = y^j \quad \partial^k \partial^j E = \frac{\partial^2 E}{\partial P_j \partial P_k} = \frac{\partial y^j}{\partial P_k} = y^{jk}$$

$$dy^j = \partial^k \partial^j E dP_k = y^{jk} dP_k = \frac{1}{\beta} y^{jk} dg_k$$

$$dP_j dy^j = dE = y^{jk} dP_j dP_k = \frac{1}{\beta^2} y^{jk} dg_j dg_k$$

$$(d\sigma)^2 = \beta dE = \frac{1}{\beta} y^{jk} dg_j dg_k = g^{jk} dg_j dg_k \qquad y^{jk} = \beta g^{jk}$$

$$(d\sigma)^2 = \beta dE = dg_k dg_j \frac{y^{jk}}{\beta} \qquad \frac{y^{jk}}{\beta} = g^{jk} = \beta \partial^k \partial^j E$$

.../...

Nous pouvons donc exprimer l'invariance du $(d\sigma)^2$ par :

$$(d\sigma)^2 = \beta\, dE = \beta\, dP_k dP_j y^{jk} = dg_k dg_j y^{jk} = dg_k dg^k = dx_\mu dx_\lambda g^{\lambda\mu} = dx_\mu dx^\mu = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$$

Nous retrouvons ainsi la règle de jeu vertical des indices muets.
Nous formons maintenant le produit :

$$g_{\lambda\mu} g^{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = g_{\mu i}\, g^{i}_{\cdot\lambda}\, g^{\lambda}_{\cdot k}\, g^{k\nu} =$$

$$= g_{\mu i}\, g^{i}_{\cdot k}\, g^{k\nu} = g_{\mu k}\, g^{k\nu} = g_{\mu}^{\cdot\nu} = \beta \partial_\mu E_k \partial^\nu E^k =$$

$$= \beta \partial_k E_\mu \partial^k E^\nu = \beta \partial^k E_\mu \partial_k E^\nu\ \beta E_\mu = x_\mu\ \beta E^\nu = x^\nu$$

$$g_{\lambda\mu} g^{\lambda\nu} = \partial^k x_\mu \partial_k x^\nu = x^k_{\mu\cdot} x_{k\cdot}^{\nu} = x_{\mu\cdot}^{\nu} =$$

$$= \beta \partial^\nu \partial^k E \partial_k x_\mu = g^{\nu k} \partial_k x_\mu = \partial^\nu x_\mu = \delta_{\mu\cdot}^{\nu}$$

$$g^{\lambda\mu} = g^{\lambda}_{\cdot j}\, g^{j\mu} = g^{\mu\lambda} = g^{j\mu} g^{\cdot\lambda}_{j} = g^{\mu j} g_{j\cdot}^{\lambda}$$

$$g_{\lambda\nu} = g_{\lambda i}\, g^{i}_{\cdot\nu} = g_{\nu\lambda} = g_{\nu i}\, g^{i}_{\cdot\lambda}$$

Ainsi les composantes co-et contravariantes du tenseur métrique sont mises sous forme d'un produit matriciel et le jeu d'indices permet le passage de la covariance à la contravariance.

$$g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} = g^{\mu j} g_{j\cdot}^{\lambda}\ g_{\lambda i}\ g^{i}_{\cdot\nu} = g^{\mu j} g_{j\lambda} g^{\lambda i} g_{i\nu} = g^{\mu}_{\cdot\lambda}\ g^{\lambda}_{\cdot\nu} =$$

$$= \delta^{\mu}_{\cdot\lambda}\ \delta^{\lambda}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\cdot\nu}$$

$$\boxed{g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\cdot\nu} = g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta_{\nu\cdot}^{\mu}}$$

$$g^{jk} g_{kl} = \delta^{j}_{\cdot l} = g_{lk} g^{kj} = \delta_{l\cdot}^{j}$$

$$g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} g_{\mu\cdot} = g_{\nu\lambda} g^{\lambda} = g_\nu$$

ou $\delta^{\mu}_{\cdot\nu}\ g_\mu = g_\nu = g_\mu\ \delta^{\mu}_{\cdot\nu} = g_\nu$

$$g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} g_\mu = g_{\nu\lambda}\ g^{\lambda}_{\cdot\mu} g^\mu = g_{\nu\lambda}\ \delta^{\lambda}_{\cdot\mu}\ g^\mu = g_{\nu\lambda}\ g^\lambda$$

$$\delta^{\lambda}_{\mu\cdot}\ g_{\lambda\nu} = g_{\mu\nu} \qquad \delta^{\mu}_{\cdot\lambda}\ g^{\lambda\nu} = g^{\mu\nu}$$

et nous trouvons par ces raisonnements :

$\partial_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu\cdot} \partial_{\lambda\nu}$	$\partial^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\cdot\lambda} \partial^{\lambda\nu}$
$\partial_{\mu\nu} = g^{\lambda}_{\mu\cdot} \partial_{\lambda\nu} = g_{\mu\lambda} \partial^{\lambda}_{\cdot\nu}$	
$\partial_{\mu\nu} = g^{\mu}_{\cdot\lambda} \partial^{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda} \partial_{\lambda\cdot}^{\nu}$	

$$g_{i\lambda} = \partial_\lambda g_i = \delta_{\lambda\cdot}^{\ j}\partial_j g_i = \delta_{\lambda\cdot}^{\ i}\partial_{ij} g$$

$$g^{i\mu} = \partial^\mu g^i = g_{\cdot j}^{\ \mu}\partial^j g^i = \delta_{\cdot j}^{\ \mu}\partial^{ji}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_{i\lambda} &= g_{\lambda\cdot}^{\ j}\partial_{ji} \\ \partial^{i\mu} &= g_{\cdot j}^{\ \mu}\partial^{ji} \end{aligned}}$$

$$g_{\cdot}^{i}{}_{\lambda} = \partial^i g_\lambda = \partial^i\partial_\lambda g = g_{\lambda\cdot}^{\ i} = \partial_\lambda\partial^i g$$

$$\boxed{g_{\cdot}^{i}{}_{\lambda} = g_{\lambda\cdot}^{\ i} \qquad \partial^i\partial_\lambda g = \partial_\lambda\partial^i g}$$

Nous écrivons ainsi :

$$\boxed{g_{\cdot\mu}^{\lambda} = g_{\mu\cdot}^{\ \lambda}} \qquad g_{\cdot\mu}^{\ \lambda} \begin{array}{ll} = 1 \text{ pour} & \mu = \lambda \\ 0 \text{ pour} & \mu \neq \lambda \end{array}$$

La matrice composée des éléments $g_{\mu\cdot}^{\ \lambda}$ est égale à sa propre transposée (matrice diagonale unitaire).

LE TENSEUR DE L'ENERGIE

Nous appellons tenseur de l'énergie le produit :

$$\Omega_{j.}^{\ i} = (g_{j.}^{\ i} + \varepsilon_{j.}^{\ i}) \frac{1}{\beta} g$$

où $g_{j.}^{\ i} = \vec{e}_j \vec{e}^{\,i}$

est le tenseur métrique mixte ou produit de deux vecteurs unitaires, dont l'un est un élément de la base covariante et l'autre de la base contravariante.

$\varepsilon_{j.}^{\ i} = \vec{e}_j \wedge \vec{e}^{\,i}$ est le spin

$$\Omega_{j.}^{\ i} = (\vec{e}_j \vec{e}^{\,i} + \vec{e}_j \wedge \vec{e}^{\,i}) \frac{1}{\beta} g = \boxed{\frac{2}{\beta} (u_j u^i) \vec{e}_j \otimes \vec{e}^{\,i}}$$

$_{j.}^{\ i}$ est donc un produit tensoriel.

Pour $j = i$ nous trouvons avec $\varepsilon_{j.}^{\ i} = o$

$$\Omega_{i.}^{\ i} = \frac{2}{\beta} u_i u^i g_{i.}^{\ i} = E_{i.}^{\ i} = E$$

$$E = \frac{2}{\beta} \begin{pmatrix} u_1 u^1 & o & o \\ o & u_2 u^2 & o \\ o & o & u_3 u^3 \end{pmatrix}$$

L'énergie E est donc un scalaire parcequ'elle est la trace de la matrice constituée par les composantes : $\Omega_{j.}^{\ i}$ du tenseur énergie. C'est la raison pour laquelle elle est invariante.

Pour $j \neq i$ nous obtenons :

$$\Omega_{j.}^{\ i} = \frac{1}{\beta} g \ \varepsilon_{j.}^{\ i} = \frac{2}{\beta} u_j u^i \ \varepsilon_{j.}^{\ i} = \frac{2}{\beta} u_j u^i \vec{e}_j \wedge \vec{e}^{\,i}$$

Avec $\frac{2}{\beta} u_j = P_j$ nous obtenons : $\Omega_{j.}^{\ i} = P_j \ u^i \ \varepsilon_{j.}^{\ i}$

Or $P_j \ u^i \ \varepsilon_{j.}^{\ i} = M_{j.}^{\ i}$ est le moment statique de la force et nous pouvons écrire :

$$\Omega_{j.}^{\ i} = E_{j.}^{\ i} + M_{j.}^{\ i}$$

$E_{j.}^{\ i} = o$ pour $j \neq i$

$E_{i.}^{\ i} = E$

.../...

FORMES EXTERIEURES LINEAIRES ET L'ELEMENT INFINITESIMAL D'UN MOMENT STATIQUE D'UNE FORCE

Nous définissons une forme extérieure linéaire par l'équation :

$$\nabla(\vec{e}_l \wedge \vec{e}^j) = \nabla \vec{e}_l \wedge \vec{e}^j + \vec{e}_l \wedge \nabla \vec{e}^j =$$

$$= \vec{e}_i \, d\Theta^{i}_{\cdot l} \wedge \vec{e}^j - \vec{e}_l \wedge d\Theta^{j}_{\cdot k} \vec{e}^k =$$

$$= d\Theta^{i}_{\cdot l} \vec{e}_i \wedge \vec{e}^j - d\Theta^{j}_{\cdot k} \vec{e}_l \wedge \vec{e}^k$$

et en remplaçant l'indice k par i dans le deuxième terme on obtient :

$$d(\vec{e}_l \wedge \vec{e}^j) = d\Theta^{i}_{\cdot l} \vec{e}_i \wedge \vec{e}^j - d\Theta^{j}_{\cdot i} \vec{e}_l \wedge \vec{e}^i =$$

$$= d\Theta^{i}_{\cdot l} \, \varepsilon_{i.}^{\ j} - d\Theta^{j}_{\cdot i} \, \varepsilon_{l.}^{\ i} = \nabla \varepsilon_{l.}^{\ j} = o$$

Nous effectuons maintenant une différentiation de la forme extérieure : $\vec{e}_l \, x^l \wedge P_j e^j = \vec{x} \wedge \vec{P}$

$$\nabla(\vec{e}_l \, x^l \wedge P_j \vec{e}^j) = d\Theta^{i}_{\cdot l} \, x^l \, \varepsilon_{i.}^{\ j} P_j + \vec{e}_l \, dx^l \wedge P_j \vec{e}^j +$$

$$+ \vec{e}_l \, x^l \wedge d P_j \vec{e}^j - d\Theta^{j}_{\cdot i} \, \varepsilon_{l.}^{\ i} x^l P_j =$$

$$= dx^l P_j \varepsilon_{l.}^{\ j} + x^l dP_j \, \varepsilon_{l.}^{\ j} + d\Theta^{i}_{\cdot l} \, x^l \, \varepsilon_{i.}^{\ j} P_j -$$

$$- d\Theta^{j}_{\cdot i} \, x^l \, \varepsilon_{l.}^{\ i} P_j$$

$$d(\vec{e}_l \, x^l \wedge P_j \vec{e}^j) = d(x^l P_j) \varepsilon_{l.}^{\ j} + x^l P_j (d\Theta^{i}_{\cdot l} \varepsilon_{i.}^{\ j} -$$

$$- d\Theta^{j}_{\cdot i} \varepsilon_{l.}^{\ i}) = d(x^l P_j) \, \varepsilon_{l.}^{\ j} + x^l P_j \nabla \varepsilon_{l.}^{\ i}$$

Avec $\nabla \varepsilon_{l.}^{\ j} = o$ on trouve :

$$d\Theta^{i}_{\cdot h} \vec{e}_i \wedge \vec{e}^j - d\Theta^{j}_{\cdot k} \vec{e}_l \wedge \vec{e}^k = o = d\Theta^{i}_{\cdot l} \, \varepsilon_{i.}^{\ j} - d\Theta^{j}_{\cdot i} \, \varepsilon_{l.}^{\ i} = o$$

et on obtient d'une part : $d\Theta^{i}_{\cdot l} \, \varepsilon_{i.}^{\ j} = d\Theta^{j}_{\cdot i} \, \varepsilon_{l.}^{\ i}$ ou

$$\boxed{d\Theta^{i}_{\cdot l} \, \varepsilon_{i.}^{\ j} - d\Theta^{j}_{\cdot i} \, \varepsilon_{l.}^{\ j} = o}$$

et d'autre part il nous reste :

$$d(\vec{e}_l \, x^l \wedge P_j \vec{e}^j) = d(x^l P_j) \, \varepsilon_{l.}^{\ j} = d(x^l P_j) \, \varepsilon^{l}_{\cdot j} = d M^{l}_{\cdot j}$$

Nous obtenons ainsi la différentielle du moment statique d'une force.

ÉQUATIONS DE BASE D'UNE THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DANS L'ESPACE DE RIEMANN

TABLEAU DE CORRESPONDANCE

THEORIE DE L'ELASTICITE CLASSIQUE

n de la contrainte $T = \frac{d\,P}{d\Omega}$

d'équilibre $\partial_j T_{ij} = o$

e déformation

$$\varepsilon_{ii} = u_{ii} = \partial_i u_i$$

$$\gamma_{ij} = u_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$$

entre tensions et
ons

$$\varepsilon_{ii} = u_{ii} = \frac{1}{E}\left[T_{ii} - \nu(T_{kk} + T_{ll})\right]$$

$$\gamma_{ij} = g_{ij} = \frac{1}{G} T_{ij}$$

ν est le coefficient de Poisson.

de compatibilité

$$\partial_{jj}\varepsilon_{ii} + \partial_{ii}\varepsilon_{jj} = \partial_{ij}\gamma_{ij} \quad (I)$$

$$\partial_i(\partial_k\gamma_{ij} + \partial_j\gamma_{ki} - \partial_i\gamma_{jk}) = 2\partial_{jk}\varepsilon_{ii} \quad (II)$$

.../...

yons pour ce tableau, une notation devenue classique jusqu'à présent, pour la e l'élasticité :

ε_{ii} pour $i = x, y, z$ correspond aux allongements $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ d'une pièce élastique, et u,v,x, aux déplacements.

Correspondance : $2\varepsilon_{ii} = g_{ii} = 2u_{ii}$

γ_{ij} pour $i = u, v, w$ $j = x, y, z$ $i \neq j$

sentes du tenseur de déformation correspondent aux angles de déformation d'un pipède élémentaire :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

TABLEAU DE CORRESPONDANCE

THEORIE D'ELASTICITE GENERALISEE

n de la contrainte	$dP_i = T_{i,kj}\, dx^j \wedge dx^k$	
énergie potentielle	$\rho = g_{li}\, T^{il} = \frac{1}{\chi}\left(3\bar{\lambda} - \frac{R}{2} \right)$	
l'équilibre et de ion d'énergie	$\nabla_l T^{il} = \partial_l T^{li} + \Gamma^i_{lm}\, T^{ml} + T^{in}\, \Gamma^l_{nl} = o$	
ondamental (tenseur de on)	$g_{jk} = \nabla_j u_k + \nabla_k u_j = \partial_j u_k + \partial_k u_j - 2u_l \Gamma^l_{jk}$	
entre tensions et ons (équations du champ)	$\chi T_{ij} = R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R)\, g_{ij}$	
entre courbure et énergie	$R = g_{ij}\, R^{ji} = -6\lambda$	
de compatibilité	$2\partial_{ij} u_{ij} = \partial_i \Gamma_{i,jj} + \partial_j \Gamma_{j,ii}$	I
	$\partial_{jk} l_{ii} = \partial_i \Gamma_{i,jk}$	II
métrique de Donder et (conditions d'harmonicité)	$\mathrm{lap}\, x^i = \nabla^2 x^i = \Gamma^i = o$	

1- CONTRAINTES, FLUX ET BIVECTEUR ELEMENT DE SURFACE

inissons la contrainte par les équations :

$$dP_i = T_{i,jk}\, d\,x^j \wedge d\,x^k$$

$$dP_i = T_{i,21}\, d\,x^1 \wedge d\,x^2 + T_{i,32}\, d\,x^2 \wedge d\,x^3 \ldots$$

lisons que $T_{i,kj}$ sont les composantes du tenseur de contrainte.

i indique la direction d'action,

es j et k se rapportent à l'élément de surface $d\,x^j \wedge d\,x^k$ que nous ns comme produit vectoriel. (produit extérieur).

du produit vectoriel est antisymetrique :

$$d\,x^j \wedge d\,x^k = - d\,x^k \wedge d\,x^j$$

oduisons le symbole de spin :

$$\varepsilon^{jk} = - \varepsilon^{kj} \qquad \varepsilon^{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pour } & j < k \\ o \text{ pour } & j = k \\ -1 \text{ pour } & j > k \end{cases}$$

$$\varepsilon^{jk} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} & \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{2I} & \varepsilon^{22} & \varepsilon^{23} \\ \varepsilon^{31} & \varepsilon^{32} & \varepsilon^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\,x^j \wedge d\,x^k = \varepsilon^{jk}\, d\,x^j\, d\,x^k$$

t vectoriel élémentaire de surface se transforme comme noté ci-dessous :

$$dS^{jk} = \varepsilon^{jk}\, dx^j\, dx^k = \varepsilon^{\lambda\mu}\, x^j_{\cdot\lambda}\, dx^\lambda\, x^k_{\cdot\mu}\, dx^\mu$$

$x^j_{\cdot\lambda} = \partial_\lambda x^j$ et $x^k_{\cdot\mu} = \partial_\mu x^k$ étant les matrices de transformation

$$dS^{jk} = -dS^{kj}$$

.../...

sidère les composantes $T_{i,jk}$ comme composantes d'un tenseur trois fois covariant
crire :

$$dP_i = T_{i,kj} dS^{jk}$$

nissons dP_i comme élément du flux de force en direction i, à travers l'élément de
S^{jk} :

$$T_{i,kj} dS^{jk} = -T_{i,jk} dS^{kj}$$

re des forces dues aux actions des contraintes agissent sur l'élément de surface
ion exterieure et interieure est donc automatiquement obtenu selon cette dernière

ons une contraction sur l'ensemble des indices en remplaçant les indices j,k par
l:

$$dP_i = T_{il} dS^l$$

une densité tensorielle de la contrainte et l'élément dS^l de surface une
tensorielle.

ntenant la transformation du flux des forces :

$$dP_\lambda = dP_i \, y^i_{\cdot\lambda} = T_{il} dS^l$$

des contraintes :

$$T_{\nu,\lambda\mu} = y^i_{\nu\cdot} \, T_{i,jk} \, y^k_{\cdot\lambda} \, y^j_{\cdot\mu}$$

2- L'ELEMENT $(d\sigma)^2$

ttons que chaque point d'un corps élastique, avant d'être soumis aux déformations, é par un système de coordonnées d'une variété V^3.

ns deux points quelconques, infiniment voisins, dont leur distance est ds_o.
x contraintes, le corps subit des déformations, et en conséquence son système de es aussi.
ce entre les deux points infiniment voisins, subit également la déformation. Nous tte nouvelle distance par ds.

crire :

$$(ds_o)^2 + (d\sigma)^2 = (ds)^2$$

$$\text{ou} \quad (d\sigma)^2 = (ds)^2 - (ds_o)^2$$

a déformation de la distance.

ns maintenant, un déplacement élastique dont les composantes covariantes sont $u_k(x^j)$.

ivées covariantes absolues sont :

$$\nabla_j u_k = \partial_j u_k - u_l \Gamma^l_{kj}$$

$$\nabla_k u_j = \partial_k u_j - u_l \Gamma^l_{jk}$$

ons les deux termes ainsi obtenus :

$$= \nabla_j u_k + \nabla_k u_j = \partial_j u_k + \partial_k u_j - u_l \left(\Gamma^l_{kj} + \Gamma^l_{jk} \right)$$

ns que g_{jk} sont les composantes covariantes d'un tenseur métrique ou tenseur l.
métrique par définition :

$$g_{jk} = g_{kj}$$

.../...

cile de constater que la somme des deux premiers termes :

$$\partial_j u_k + \partial_k u_j$$

ique aux composantes du tenseur de déformation de la théorie de l'élasticité , car en se plaçant dans un système de coordonnées rectilignes et orthogonales, les symboles de Christoffel : Γ^l_{kj} et Γ^l_{jk} et on trouve :

$$g_{jk} = \partial_j u_k + \partial_k u_j$$

k la somme $\partial_j u_k + \partial_k u_j = \gamma_{jk}$

tilisons les notations habituelles de la théorie de l'élasticité classique), sont omposantes du tenseur de déformation représentant les angles de rotation entre données.

j la somme $\partial_j u_k + \partial_k u_j$

à $2\partial_j u_j = 2\varepsilon_{jj}$ ou les ε_{jj} sont les valeurs des allongements, donc les trois nposantes du tenseur de déformation.

catons l'incohérence de la symbolisation utilisée par la théorie de ité classique, car elle introduit une distinction artificielle entre les éléments a diagonale principale de la matrice du tenseur de déformation, et ceux des autres γ_{jk} de cette matrice.

ns ensuite :

$$(d\sigma)^2 = g_{jk}dx^k dx^j = g_{kj}dx^j dx^k$$

nous n'avons aucun droit d'admettre l'annulation des symboles de Christoffel pour tème de coordonnées déformées.

ensuite l'existence d'une fonction potentielle telle que les composantes u_j, u_k es gradients de cette fonction scalaire :

$$u = u(x^i) \qquad u_j = \partial_j u \qquad u_k = \partial_k u$$

lors écrire :

$$\nabla_k u_j = \nabla_k \partial_j u$$

$$\nabla_j u_k = \nabla_j \partial_k u$$

.../...

comme résultat :

$$g_{jk} = \nabla_k u_j + \nabla_j u_k = \partial_j \partial_k u + \partial_k \partial_j u - \partial_l u(\Gamma_j{}^l{}_k + \Gamma_k{}^l{}_j) =$$

$$= 2\partial_{jk} u - \partial_l u\,(\Gamma_j{}^l{}_k + \Gamma_k{}^l{}_j)$$

rmons le rotationel :

$$\text{rot } u = \nabla_k u_j - \nabla_j u_k = \partial_{jk} u - \partial_{kj} u - \partial_l u(\Gamma_j{}^l{}_k - \Gamma_k{}^l{}_j)$$

ons avec : rot u = o

$$\partial_{jk} u - \partial_{kj} u = o \quad \text{et} \quad \Gamma_j{}^l{}_k - \Gamma_k{}^l{}_j = o$$

on $\Gamma_j{}^l{}_k - \Gamma_k{}^l{}_j$ représente le tenseur de torsion. Il est nul dans un mannien à cause de la commutativité des indices inférieurs.

été V^3 est donc riemannienne; nous pouvons écrire :

$$g_{jk} = 2\,(\partial_{jk} u - \partial_l u\ \Gamma_j{}^l{}_k)$$

lte ensuite selon le théorème de Ricci :

$$\nabla g_{jk} = 2\nabla(\partial_{jk} u - \partial_l u\ \Gamma_j{}^l{}_k) = o$$

3- DISCUSSION DES EQUATIONS DE COMPATIBILITE

ici-dessous, le deuxième groupe d'équations de compatibilité, tout en conservant
ons de la théorie de l'élasticité classique, pour les signes de base :

$$2\,\partial_{jk}\,\varepsilon_{ii} = \partial_i\,(\partial_k\,\gamma_{ij} + \partial_j\,\gamma_{ki} - \partial_i\,\gamma_{jk})$$

oix entre trois hypothèses :

$_{mn}$ sont des constantes. Mais dans ce cas les dérivées entre parenthèses $\partial_l \gamma_{mn}$
iquement zéro, soit que les γ_{mn} sont des fonctions linéaires et que la dérivée
parenthèse est nulle, ou enfin que les γ_{mn} sont des fonctions du type :

$^j, x^k)$ et successivement dérivables sans aucune restriction.

pas de vue, qu'il s'agit ici d'une discussion sur des composantes d'un tenseur
l et les décisions qu'on pourrait prendre à ce sujet sont lourdes de conséquences
rique choisie, puisque le choix de cette métrique ainsi effectué, selon l'hypo-
sie, determine l'espace dans lequel on se place, délimite les types d'équations
elles et les relations entre déformations et contraintes.

oyons aucun interêt de faire disparaître les $\partial_l\,\gamma_{mn}$.

oix conduirait à des γ_{mn} constants, et à la disparition des équations de
ité, c'est à dire à une théorie de l'élasticité, où toutes les déformations
des déplacements ou rotations arbitraires, sans aucun lien fonctionel entre eux.

ix doit se restreindre sur la deuxième et troixième hypothèse.

donc aux conclusions :

$$\partial_l\,\gamma_{mn} \neq 0 \qquad \partial_{jk}\,\varepsilon_{ii} \neq 0$$

ce cas si les γ_{mn} sont des composantes d'un tenseur fondamental les parenthèses

$_{ij} + \partial_j\,\gamma_{ki} - \partial_i\,\gamma_{jk})$

ouble des symboles de Christoffel de première espèce :

$_{ij} + \partial_j\,\gamma_{ki} - \partial_i\,\gamma_{jk}) = 2\,\Gamma_{i,jk}$

.../...

ous pouvons écrire :

$$\boxed{\partial_{jk}\,\varepsilon_{ii} = \partial_i\,\Gamma_{i,jk}} \qquad (II)$$

ient alors possible, de représenter les trois premières équations de compatibilité s combinaisons des mêmes symboles :

$$\partial_{jj}\,\varepsilon_{ii} = \partial_i\,\Gamma_{i,jj}$$

$$\partial_{ii}\,\varepsilon_{jj} = \partial_j\,\Gamma_{j,ii}$$

a obtient par addition de ces deux équations :

$$\boxed{\partial_{jj}\,\varepsilon_{ii} + \partial_{ii}\,\varepsilon_{jj} = \partial_i\,\Gamma_{i,jj} + \partial_j\,\Gamma_{j,ii}} \qquad (I)$$

st évident que les équations de compatibilité I et II sont en desaccord avec la ique choisie, donc avec la simplification de base admise par la théorie de asticité classique :

$$g_{jk} = \partial_j u_k + \partial_k u_j \quad \text{avec} \quad \Gamma^l_{jk} = o$$

$$\text{avec} \quad g_{jk} = \gamma_{jk} \qquad g_{jj} = 2\,\varepsilon_{ii}$$

ieu d'écrire :

$$g_{jk} = \partial_j u_k + \partial_k u_j - 2u_l\,\Gamma^l_{jk}$$

Γ^l_{jk}=o les symboles $\Gamma_{i,jk}$ $\Gamma_{i,jj}$ et $\Gamma_{j,ii}$ deviennent aussi zero, les groupes d'équations de compatibilité disparaissent complètement.

nous arrivons, comme on le constatera ci-dessous, au même résultat par un autre onnement.

eut aussi bien raisonner ainsi :

$ds_o)^2$ dans un système euclidien est caractarisé par la forme quadratique :

$$(ds_o)^2 = g_{\beta\alpha}\,dx^\alpha dx^\beta \qquad \begin{array}{l}\alpha = 1, 2, 3\\ \beta = 1, 2, 3\end{array}$$

$$g_{\beta\alpha} = o \text{ pour } \alpha \neq \beta$$

.../...

l les composantes $g_{\beta\alpha}$ ne sont pas des fonctions des coordonnées, mais celles d'une ce-unité .

$$(ds_o)^2 = \delta_{\beta\alpha}\, dx^\alpha dx^\beta$$

un système de coordonnées déformées nous trouvons :

$$dx^j = \partial_\alpha x^j dx^\alpha \qquad \text{ou} \qquad dx^k = \partial_\beta x^k dx^\beta$$

$$(ds)^2 = (g_{\beta\alpha} + g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\alpha x^j)\, dx^\alpha dx^\beta$$

$$\text{avec} \quad g_{\beta\alpha} + g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\beta x^j = G_{\beta\alpha}$$

ns :

$$(ds)^2 = (g_{\beta\alpha} + g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\alpha x^j)\, dx^\alpha dx^\beta = G_{\beta\alpha}\, dx^\alpha dx^\beta$$

st l'élément des coordonnées qui ont subit les déformations du corps élastique,

'est pas évident que $G_{\beta\alpha}$ soit un tenseur euclidien!

$$(d\sigma)^2 = (ds)^2 - (ds_o)^2 = g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\alpha x^j dx^\alpha dx^\beta$$

que $G_{\beta\alpha}$ soit un tenseur euclidien il faut que $g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\alpha x^j$ soit constant

$$(d\sigma)^2 = g_{jk}\partial_\beta x^k \partial_\alpha x^j dx^\alpha dx^\beta = g_{kj}\partial_\alpha x^j dx^\alpha \partial_\beta x^k dx^\beta =$$

$$= g_{kj} dx^j dx^k$$

enseur g_{jk} n'est pas euclidien puisqu'il se rapporte au système déformé x^j, x^k parcequ'il est le tenseur de déformation.

supposer constant, signifie que toutes les dérivées du tenseur g_{jk} par rapport ne coordonnée quelconque x^l, sont zéro :

$$\partial_l g_{jk} = o$$

s un tel cas, les dérivées d'ordre supérieur n'ont plus de signification, et les quations de compatibilité disparaissent.

dérivées $\partial_\alpha x^j$ et $\partial_\beta x^k$ sont par définition des fonctions des x^α et x^β.

4- CONTRAINTES ET DENSITE DE L'ENERGIE

définissons dans une variété V^3 la contrainte élastique comme densité orielle d'une forme extérieure :

$$dP_i = T_{i,jk} dx^j \wedge dx^k$$

$T_{i,jk}$ sont les composantes du tenseur de tension (contrainte), $dx^j \wedge dx^k = dS^{jk}$, audrait écrire $d^2 (S^{jk})$), l'élément de surface formée par les différentielles t dx^k, ces coordonnées x^j et x^k et dP_j, l'élément de flux de la force élastique ne à travers l'élément de surface dS^{jk}.

résulte : $dP_i = T_{il} dS^l$ par contraction sur les indices j,k, en attribuant au e d'indices jk l'indice l.

troduisant le vecteur élémentaire $dx^i = dx_l g^{li}$ on trouve la forme :

$$dE = dP_i dx^i = T_{il} g^{li} dx_l dS^l$$

appelons :

$dx_l dS^l = dV$, l'élément de volume de matière déformée

$dE = dP_i dx^i$, l'élément d'énergie interne

$T_{il} g^{li} = g^{li} T_{il} = g_{li} T^{il}$, est la densité d'energie interne

$$\boxed{dP_i dx^i = g_{li} T^{il} dV}$$

finissant un vecteur covariant d'un déplacement dû à une déformation élastique

$$g_j = \beta P_j \qquad \text{ou} \qquad P_j = \frac{1}{\beta} g_j$$

nous plaçons dans un espace complètement métrique. D'autre part nous constatons équation :

$$P_j = \frac{1}{\beta} g_j$$

it le fait que la seule mesure correcte d'une force est celle effectuée n dynamomètre pour lequel $\frac{1}{\beta}$ est la constante du ressort.

.../...

obtenons ainsi :

$$d\,\partial g_j = \beta dP_j = \partial_k g_j dx^k = g_{jk} dx^k = \beta\,\partial_k P_j dx^k$$

r introduction de l'expression :

$$(d\sigma)^2 = g_{jk} dx^k dx^j = \beta\, dP_j dx^j = \beta\, dE$$

(nous devons plutôt écrire $\beta\, d^2(E)$).

nant compte de l'équation :

$$dE = g^{li} T_{il} dV$$

trouvons le théorème de Ostrogradsky :

$$\boxed{\int dP_j dx^j = \frac{1}{\beta} \iint g_{kj} dx^j dx^k = \iiint g^{li} T_{il} dV = \iiint g_{li} T^{il} dV}$$

ilisant le jeu vertical d'indices muets :

$$(d\sigma)^2 = g_{kj} dx^j dx^k = dx_k dx_j g^{jk}$$

trouvons $\quad g_{jk} dx^k = \beta dP_j = dx_j$

r analogie : $\quad dx_k = \beta\, dP_k$

i permet d'écrire :

$$\boxed{dE = dP_k dP_j g^{jk}}$$

.../...

admettons que le corps est parfaitement élastique et qu'il ne possède aucune e positive ou négative d'énergie :

$$\nabla(g_{li}T^{il}) = (\nabla g_{li})\,T^{il} + g_{li}\,(\nabla T^{il}) = o$$

le théorème de Ricci il en résulte :

$$\nabla g_{li} = o \qquad \text{et} \qquad \nabla T^{il} = o$$

$$\nabla_j T^{il} = \partial_j T^{il} + \Gamma^{i}_{j\,k} T^{kl} + T^{im}\,\Gamma^{l}_{m\,j} = o$$

ntraction $j = l$ nous obtenons les équations de l'équilibre élastique, iques avec la forme covariante générale de la théorie de gravitation de Einstein lée aussi théorème de Hilbert de la conservation de l'énergie :

$$\boxed{\operatorname{div} T^{il} = \nabla_l T^{il} = \partial_l T^{il} + \Gamma^{i}_{l\,k} T^{kl} + T^{im}\,\Gamma^{l}_{m\,l} = o}$$

le cas très particulier d'un système de coordonnées rectilignes et orthogonales résulte :

$$\Gamma^{i}_{l\,k} = o \qquad \Gamma^{l}_{m\,l} = o$$

ou $$\boxed{\partial_l T^{il} = o}$$

5- METRIQUE, TENSION ET LES EQUATIONS DU CHAMP DE EINSTEIN

enant nous admettons comme base de départ de notre discussion, les identités anchi :

$$\nabla_m R^i{}_{\cdot jkl} + \nabla_k R^i{}_{\cdot jlm} + \nabla_l R^i{}_{\cdot jmk} = o$$

s l'égalité des indices $l = i$ et nous obtenons :

$$\nabla_m R^i{}_{\cdot jki} + \nabla_k R^i{}_{\cdot jim} + \nabla_i R^i{}_{\cdot jmk} = o$$

enseur de Riemann - Christoffel étant antisymétrique sur les deux derniers indices iants nous pouvons écrire :

$$-\nabla_m R^i{}_{\cdot jik} + \nabla_k R^i{}_{\cdot jim} + \nabla_i R^i{}_{\cdot jmk} = o \quad \text{ou par contraction,}$$

$$-\nabla_m R_{jk} + \nabla_k R_{jm} + \nabla_i R^i{}_{jmk} = o$$

e jeu vertical avec l'indice j nous trouvons ensuite :

$$-\nabla_m R^j{}_{\cdot k} + \nabla_k R^j{}_{\cdot m} + \nabla_i R^{ij}_{mk} = o$$

rès l'égalité entre les indices k et j : $k = j$ on obtient :

$$-\nabla_m R^j{}_{\cdot j} + \nabla_j R^j{}_{\cdot m} + \nabla_i R^{ij}_{mj} = o$$

rès changement de l'indice muet i en j :

$$-\nabla_m R + 2\,\nabla_j R^j{}_{\cdot m} = o$$

.../...

pouvons écrire :

$$\nabla_m = g_{m.}{}^{j} \nabla_j$$

$$2 \nabla_j R^j{}_{.m} - \nabla_j R g^j{}_{.m} = o$$

$$\boxed{\nabla_j \left(R^j{}_{.m} - \frac{1}{2} g^j_{.m} R\right) = o}$$

ou

$$\boxed{\nabla^j \left(R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R\right) = o}$$

équations sont connues sous le nom des équations du champ d' Einstein :

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = U_{jm} \qquad \nabla^j U_{jm} = o$$

$$\nabla_j U^j{}_{.m} = o \qquad \nabla_j U^{jm} = o$$

reste la conclusion $U^{jm} = \chi \; T^{jm}$

autrement dit le tenseur de contrainte doit être à un facteur constant χ près, identique au tenseur U_{jm} :

$$\nabla_j U^{jl} = \nabla_j \chi T^{jl} = \chi \; \nabla_j T^{il} = o$$

résulte de nouveau :

$$\boxed{\nabla_j T^{jl} = o}$$

notons : $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \chi T_{ij}$

on peut fort bien imaginer qu'il peut éxister une déformation d'un corps sans courbure, par pure extension.

./ ..

ons donc un terme λg_{ij} et nous obtenons finalement :

$$R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R)\, g_{ij} = \chi\, T_{ij}$$

pour $R_{ij} = 0$ et $R = o$ il reste $\lambda\, g_{ij} = \chi\, T_{ij}$

seur $R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R) g_{ij} = U_{ij}$ obéit également aux équations $\nabla^{j} U_{ij} = o$

$_{ij} = o$ et $R = o$ le tenseur fondamental est un tenseur euclidien.

s essayons de représenter les relations classiques entre les composantes du r de déformation et de tension, sous la forme de la loi de Hooke, généralisée :

$$\frac{1}{2} g_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) T_{ij} - \frac{\nu}{E}\, \delta_{ij}\, T$$

où

$$T = \delta^{ml}\, T_{lm}$$

$$g_{ij} = \gamma_{ij}$$

$$g_{ii} = 2\,\varepsilon_{ii}$$

onstatons que ces équations ne peuvent être généralisées pour n'importe quel e de coordonnées. Donc, même en remplaçant les relations :

$$\lambda\, g_{ij} = \chi\, T_{ij}$$

s équations ci-dessus nous ne pouvons pas remonter jusqu'aux équations du élastique :

$$R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R) g_{ij} = \chi T_{ij}$$

us considérons pour des raisons exprimées au début du chapitre, comme impératives, e les symboles co-et contravariants δ_{ij} et δ^{ij} n'existent pas dans une ue riemannienne.

ffectuons une multiplication contractée des équations du champ :

$$R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R)\, g_{ij} = \chi\, T_{ij}$$

$$g^{ki} R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R)\, g^{ki} g_{ij} = \chi\, g^{ki}\, T_{ij}$$

$$R^{k}_{\cdot j} + (\lambda - \frac{1}{2} R) g^{k}_{\cdot j} = \chi T^{k}_{\cdot j}$$

.../...

= j il résulte :

$$R_{j.}^{i} + (\lambda - \frac{1}{2} R)\, g_{j.}^{i} = \chi\, T_{j.}^{i}$$

s l'égalisation des indices j = i et contraction :

$$+ 3\lambda - \frac{3}{2} R = \chi T \qquad R = R_{i.}^{i} \qquad \text{et} \qquad T = T_{i.}^{i}$$

mmation sur l'indice muet i :

$$\boxed{3\lambda - \frac{R}{2} = \chi T}$$

$$R = o \qquad \boxed{T = 3\,\frac{\lambda}{\chi}}$$

uvons aussi bien écrire : $g^{ji} R_{ij} + (\lambda - \frac{1}{2} R) g^{ji} g_{ij} = \chi\, g^{ji} T_{ij}$

$^{i} T_{ij} = g_{ji} T^{ij}$ par jeu vertical d'indices on obtient :

$$\lambda - \frac{R}{2} = \chi\, T_{i.}^{i} = \chi T$$

$$dE = (3\lambda - \frac{R}{2})\, dV$$

$$\boxed{dE = \frac{1}{\chi} (3\lambda - \frac{R}{2})\, dV}$$

$$\boxed{g_{ji} T^{ij} = T_{j.}^{j} = T = \frac{1}{\chi} (3\lambda - \frac{R}{2})}$$

ité d'énergie est identique à la somme invariante des contraintes.

6- L'INVARIANT $\chi^2 T_{ji} T^{ij}$

rmons maintenant le produit $\chi^2 T_{ji} T^{ik}$ en précisant :

$$\chi T_{ji} = R_{ji} + (\lambda - \frac{R}{2}) g_{ji}$$

$$\chi T^{ik} = R^{ik} + (\lambda - \frac{R}{2}) g^{ik}$$

$$R_{ji}R^{ik} + (\lambda - \frac{R}{2})g_{ji}R^{ik} + (\lambda - \frac{R}{2})R_{ji}g^{ik} + (\lambda - \frac{R}{2})^2 g_{ji}g^{ik} = \chi^2 T_{ji} T^{ik}$$

traction sur l'indice i nous obtenons :

$$R_{*} R^{*} + (\lambda - \frac{R}{2})g_{j.} R^{.k} + (\lambda - \frac{R}{2})g^{k.} R_{.j} + (\lambda - \frac{R}{2})^2 \delta_{j.}^{k} = \chi^2 T_{ji} T^{ik}$$

traction sur j et k :

$$(R)^2 + 2(\lambda - \frac{R}{2}) R + (\lambda - \frac{R}{2})^2 \delta_{j.}^{j} = (\chi T)^2$$

u $$2\lambda R + \left[\lambda^2 - \lambda R + (\frac{R}{4})^2\right] \delta_{j.}^{j} = (\chi T)^2$$

ons la substitution :

$$\chi T = 3\lambda - \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad (\chi T)^2 = 9\lambda^2 - 3\lambda R + (\frac{R}{4})^2$$

$$2\lambda R + 3\left[\lambda^2 - \lambda R + (\frac{R}{4})^2\right] = 9\lambda^2 - 3\lambda R + (\frac{R}{4})^2$$

e : $$(\frac{R}{2})^2 + 2\lambda R = 6\lambda^2$$

quation permet d'admettre pour R deux solutions :

$$R_1 = -2\lambda + 4\lambda = 2\lambda$$

$$R_2 = -2\lambda - 4\lambda = -6\lambda$$

: $$T = \frac{1}{\chi}(3\lambda - \frac{R}{2})$$

$$R = 2\lambda \qquad T = \frac{\lambda}{\chi}$$

$$R = -6\lambda \qquad T = \frac{6}{\chi}\lambda$$

.../..

cas $R = 2\lambda$ est exclu puisqu'en l'introduisant dans l'équation :

$$R_{ij} + (\lambda - \frac{R}{2})\, g_{ij} = \chi T_{ij}$$ on annule le terme $(\lambda - \frac{R}{2})g_{ij}$

outit à une simple proportionalité entre les tenseurs R_{ij} et T_{ij}

$$R_{ij} + (\lambda + \frac{6\lambda}{2})g_{ij} = \chi T_{ij} \quad \text{ou} \quad R_{ij} + 4\lambda\, g_{ij} = \chi T_{ij}$$

re par multiplication contractée :

$$g^{ji} R_{ij} + 4\lambda\, g^{ji} g_{ij} = \chi\, g^{ji} T_{ij}$$

$$R + 12\lambda = \chi T$$

$$-6\lambda + 12\lambda = \chi T$$

$$\chi T = 6\lambda$$

$$T = \frac{6\lambda}{\chi}$$

$T^{j}_{\cdot j}$ avec sommation sur l'indice j est la trace invariante de la matrice $T^{i}_{\cdot j}$.

$$R_{ji} = g^{ij} (\Gamma^{m}_{jl}\Gamma^{l}_{mi} - \Gamma^{m}_{ji}\Gamma^{l}_{ml} + \partial_j \Gamma^{l}_{il} - \partial_l \Gamma^{l}_{ji}) = -6\lambda$$

pliquant le théorème de Ricci nous notons :

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^{m}_{ik} g_{mj} - \Gamma^{n}_{ik} g_{nj} = 0$$

$$\Gamma^{m}_{ik} g_{mj} = \Gamma_{j,ik} \qquad \Gamma^{n}_{jk} g_{in} = \Gamma_{i,jk}$$

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}$$

$$\nabla_k g^{il} = \partial_k g^{il} + \Gamma^{i}_{mk} g^{ml} + \Gamma^{l}_{kn} g^{in} = 0$$

$$\nabla_k (g_{ji} g^{il}) = (\nabla_k g_{ji})\, g^{il} + g_{ji} (\nabla_k g^{il}) = 0$$

.../...

$$\nabla_k (g_{ji} g^{il}) = \partial_k g_{ji} g^{il} - \Gamma_{kji} g^{il} - \Gamma_{jki} g^{il} +$$

$$+ g_{ji} \partial_k g^{il} + g_{ji} \Gamma_{k\ m}^{\ i} g^{ml} + \Gamma_{k\ n}^{\ l} g^{ni} g_{ij} = o$$

$$\partial_k g_{ji} g^{il} + g_{ji} \partial_k g^{il} = \partial_k g_{j\ .}^{\ l}$$

$$\partial_k g_{j.}^{\ l} = \partial_k \delta_{j.}^{\ l} = \Gamma_{kji} g^{il} + \Gamma_{jki} g^{il} - \Gamma_{k\ m}^{\ i} g_{ij} g^{ml} - \Gamma_{k\ n}^{\ l} g_{ji} g^{in} =$$

$$= \Gamma_{k\ j}^{\ l} + \Gamma_{j\ k}^{\ l} - \Gamma_{k\ j}^{\ l} - \Gamma_{k\ j}^{\ l} = o$$

ecrivons donc :

$$\partial_k g_{j.}^{\ l} = o$$

uvant nous avons trouvés :

$$R_{j.}^{\ l} + 4\lambda g_{j.}^{\ l} = \chi T_{j.}^{\ l}$$

$$\nabla_k R_{j.}^{\ l} + 4\lambda \nabla_k g_{J.}^{\ l} = \chi \nabla_k T_{j.}^{\ l}$$

me $4\lambda \nabla_k g_{j.}^{\ l}$ disparait complètement, il reste :

$$\nabla_k R_{j.}^{\ l} = \chi \nabla_k T_{j.}^{\ l}$$

$$\nabla_k (R_{j.}^{\ l} - \chi T_{j.}^{\ l}) = o$$

ltiplication avec $g_{l.}^{\ j}$ nous trouvons :

$$g_{l.}^{\ j} \nabla_k R_{j.}^{\ l} = \nabla_k (g_{l.}^{\ j} R_{j.}^{\ l}) = \nabla_k R = \chi \nabla_k (g_{l.}^{\ j} T_{j.}^{\ l})$$

$$\nabla_k R = - 6 \nabla_k \lambda = o$$

$$\nabla_k T = o$$

.. /...

$$\boxed{\partial_k T = 0}$$

$$= \nabla_k g^{ji} \left(\Gamma_{il}^{m} \Gamma_{mj}^{l} - \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{ml}^{l} + \partial_j \Gamma_{il}^{l} - \partial_l \Gamma_{ij}^{l} \right) +$$

$$g^{ji} \nabla_k \left(\Gamma_{il}^{m} \Gamma_{mj}^{l} - \Gamma_{ij}^{m} \Gamma_{ml}^{l} + \partial_j \Gamma_{il}^{l} - \partial_l \Gamma_{ij}^{l} \right) = 0$$

7- LE TENSEUR METRIQUE DE DEFORMATION

EXPRIME EN SYMBOLES DE CHRISTOFFEL DE PREMIERE ESPECE

avons trouvé comme tenseur de déformation :

$$g_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i = \partial_j u_i + \partial_i u_j - 2\,\Gamma_{l,ij} u^l$$

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\,(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{jl} - \partial_l\, g_{ij})$$

$$g_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - (\partial_j g_{lk} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})\, u^l$$

ettant une fonction potentielle $u(x^i)$ on peut noter :

$$g_{jk} = 2\,(\partial_{jk} u - \partial_l u\, \Gamma_{j\,k}^{\;l})$$

$$\partial^l u = g^{li} \partial_i u$$

$$\boxed{g_{jk} = 2\,(\partial_{jk} u - \Gamma_{l,jk}\, \partial^l u)}$$

8- AUTRE REPRESENTATION DE L'EQUATION DU CHAMP

it :

$$R_{jk} + 4\lambda g_{jk} = \chi T_{jk}$$

rouvons par multiplication avec g^{ki} :

$$R_{jk}g^{ki} + 4\lambda g_{jk}g^{ki} = \chi T_{jk}g^{ki}$$

$$R_{j.}^{\ i} + 4\lambda g_{j.}^{\ i} = \chi T_{j.}^{\ i}$$

contraction j=i :

$$R + 12\lambda = \chi T \qquad R = -6\lambda \qquad 6\lambda = \chi T$$

$$-\chi \frac{T}{2} g^{ij} = -3\lambda g^{ij} \qquad -\chi \frac{T}{2} g^{ij} = \frac{R}{2} g^{ij}$$

$$R^{ji} + 4\lambda g^{ji} = \chi T^{ji}$$

$$-3\lambda g^{ji} = -\chi \frac{T}{2} g^{ji}$$

$$R^{ij} + \lambda g^{ij} = \chi (T^{ij} - \frac{T}{2} g^{ij}) \quad \text{après addition ,}$$

bstituant $\lambda = -\alpha$, il résulte :

$$R^{ij} - \alpha g^{ij} = \chi (T^{ij} - \frac{T}{2} g^{ij})$$

ncore il ne s'agit que d'une nouvelle représentation de l'équation du champ nstein.

9- COORDONNEES AMORPHES

ET CONDITION D'HARMONICITE (DE DE DONDER)

admettons que les coordonnées déformées x^j sont des coordonnées harmoniques. sont définies par l'équation :

$$\nabla^2 x^j = \text{lap}\, x^j = o$$

ordonnées sont des dérivées d'une fonction potentielle:

$$\partial_i g = x_i$$

$$g^{ji} x_i = g^{ji} \partial_i g = x^j$$

$$\nabla_j (g^{ji} x_i) = \nabla_j g^{ji} \partial_i g =$$

$$= (\nabla_j g^{ji}) x_i + g^{ji} (\nabla_j x_i) = g^{ji} \nabla_j x_i$$

ue selon le théorème de Ricci il est :

$$\nabla_j g^{ji} = o$$

$$\nabla_j (g^{ji} x_i) = \nabla_j x^i$$

$$\partial_i g = g_i \quad \text{ou} \quad \nabla_j x^j = \text{div grad}\ g$$

$$\nabla_j (x^j) = g^{ji} \partial_j g_i - g^{ji} g_l \Gamma_{i\ j}^{\ l}$$

re part il est possible d'écrire :

$$\nabla_j x^j = \partial_j g^j + g_l \Gamma^l = \nabla_j (g^{ji} \nabla_i g) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j g = \nabla^2 g$$

.../...

$$\nabla^2 g = \text{lap } g = \nabla_j x^j$$

est le laplacien de la fonction potentielle g.

$$\Gamma^l = - g^{ij} \Gamma_{j\,i}^{\;l}$$

ons ensuite pour rendre les calculs suivant plus transparent :

$$\nabla^2 g = \nabla_j (\partial_i g) g^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \left(\sqrt{\text{dét } g_{ij}} \, \partial_j g \, g^{ij} \right)$$

remplaçant la fonction g par $g^j = x^j$

$$\nabla^2 x^j = \frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \left(\sqrt{(\text{dét } g_{ij})} \, g^{ij} \right) \quad \text{puisque } \partial_k \partial^j g = 1 \text{ pour } k = j$$

r définition : $\nabla^2 x^j = o$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \left(\sqrt{\text{dét } g_{ij}} \, g^{ij} \right) = \frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \sqrt{\text{dét } g_{ij}} \, g^{ij} + \partial_i g^{ij} = o$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \sqrt{\text{dét } g_{ij}} = \Gamma_{m\,i}^{\;m} = \partial_i \left(\ln \sqrt{\text{dét } g_{ij}} \right)$$

$$\nabla^2 x^j = o = \frac{1}{\sqrt{\text{dét } g_{ij}}} \partial_i \sqrt{\text{dét } g_{ij}} \, g^{ij} + \partial_i g^{ij} = \Gamma_{m\,i}^{\;m} g^{ij} + \partial_i g^{ji}$$

$$j = \partial_i g^{ij} + \Gamma_{i\,k}^{\;i} g^{kj} + \Gamma_{n\,i}^{\;j} g^{in} = o \quad \text{selon le théorème de Ricci.}$$

..../...

résulte ensuite :

$$\partial_i g^{ij} = -\Gamma^i_{ik} g^{kj} - \Gamma^j_{ni} g^{in}$$

$$\nabla^2 x^j = \Gamma^m_{mi} g^{ij} - \Gamma^i_{ik} g^{kj} - \Gamma^j_{ni} g^{in} = o$$

çons dans le terme $\Gamma^i_{ik} g^{kj}$ l'indice muet i par m et l'indice muet k par i

$$\nabla^2 x^j = \Gamma^m_{mi} g^{ij} - \Gamma^m_{mi} g^{ij} - \Gamma^j_{in} g^{nj} = o$$

te :

$$\nabla^2 x^j = - \Gamma^j_{ni} g^{in} = \Gamma^j = o$$

o est la condition d'harmonicité (de De Donder et Lanczos).

$$\boxed{\nabla^2 x^j = \Gamma^j = o}$$

irons donc la conclusion que :

$$\boxed{x_l \Gamma^l = o}$$

te :

$$\boxed{\nabla_j x^j = (\partial_j x_i) g^{ij} = g^{ji} \partial_{ij} g = \operatorname{div} x = \operatorname{div} g}$$

ouvons aussi écrire :

$$\partial_k g^{jk} + \partial_k \ln \sqrt{\text{dét } g_{ij}}\, g^{jk} = o$$

10- TENSEUR DE DEFORMATION g_{ij} ET TENSEUR DE KRONECKER

finissons le tenseur métrique g_{ij} par l'équation : $g_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j - 2u_l \Gamma^l_{ij}$

$$g_{ji} g^{ik} = \partial_j u_i g^{ik} + \partial_i u_j g^{ik} - 2u_l \Gamma^l_{ji} g^{ik} = \delta^k_{j.} = g^k_{j.}$$

k nous pouvons écrire :

$$g_{ji} g^{ij} = \partial_j u_i g^{ij} + \partial_i u_j g^{ij} - 2 u_l \Gamma^l_{ji} g^{ij} =$$

$$= \partial_{ij} u g^{ij} + \partial_{ji} g^{ij} + u_l \Gamma^l = \delta^j_{j.}$$

ons en appliquant la condition d'harmonicité :

$$\Gamma^l = o \qquad u_l \Gamma^l = o$$

$$\boxed{\delta^j_{j.} = 2 g^{jj} \partial u_{jj} = g^{jj} g_{jj} = \delta}$$

emarquons que l'invariant de l'élasticité classique :

$$I = (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2$$

fond avec la trace de la matrice-unité.

s reprenons :

$$g_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j - 2u_l \Gamma^l_{ij}$$

.../....

obtenons par rajeunissement :

$$g_{ji}g^{ij} = \delta^{j}_{j.} = g_{ij}g^{ji} = \delta^{i}_{i.} = 2\,(\partial_{ij}u - \partial_{l}u\Gamma^{l}_{ij})g^{ij} = 2\,\partial_{ij}ug^{ij}$$

$$\boxed{\delta^{i}_{i.} = \delta^{j}_{j.} = 2\partial_{ij}u^{ij} = \delta^{*}_{*.} = \delta}$$

note le laplacien de u :

$$\text{lap } u = \nabla^{2}u = \nabla_{k}\nabla_{j}u^{jk} = \nabla_{k}u_{j}g^{jk} = g^{jk}\,(\partial_{j}u_{k} - u_{l}\Gamma^{l}_{kj})$$

vec $\qquad u_{l} = g_{lm}u^{m}$

$$g^{jk}\,(\partial_{j}u_{k} - \Gamma^{l}_{jk}g_{lm}u^{m}) = g^{jk}\,(\partial_{j}u_{k} - \Gamma_{m,jk}u^{m}) = g^{jk}\partial_{j}u_{k} - g^{jk}\Gamma_{m,kj}u^{m} =$$

$$= g^{jk}\partial_{jk}u - \Gamma_{m}u^{m}$$

outit au même résultat :

$$\delta^{j}_{j.} = \delta^{k}_{k.} = \delta^{*}_{*.} = g^{jk}\partial_{jk}u$$

$$\delta^{k}_{j.}\,\delta^{j}_{k.} = \delta^{j}_{j.} = \delta = 4g^{ji}g^{ki}\,(u_{ij} - u_{l}\,\Gamma^{l}_{ij})(u_{ik} - u_{m}\,\Gamma^{m}_{ik}) =$$

$$4g^{ji}g^{ki}u_{ij}u_{ik} + 4\,g^{ji}g^{ki}\,(-u_{ij}u_{m}\,\Gamma^{m}_{ii} - u_{l}\,\Gamma^{l}_{ij}u_{ik} + u_{l}\,\Gamma^{l}_{ij}u_{m}\,\Gamma^{m}_{ik}) =$$

$$= 4g^{ji}g^{ki}u_{ij}u_{ik}$$ à cause de la condition d'harmonicité,

faut donc qu'il soit ;

$$\boxed{\delta^{k}_{j.}\delta^{j}_{k.} = 4\,g^{ji}g^{ki}u_{ij}u_{ik}}$$

.../...

11 - TENSEUR DE DEFORMATION ET DERIVEES DU POTENTIEL.

$$(d\sigma)^2 = 2\,(\partial_{ij}u - u_m\,\Gamma^m_{j\,i})\,dx^i dx^j =$$

$$= 2\,\partial_{ij}u dx^i dx^j - 2u_m\,\Gamma^m_{j\,i} dx^i dx^j$$

$$dx^i = dx_k g^{ki}$$

$$dx^j = dx_l g^{lj}$$

$$dx^i dx^j = dx_l dx_k g^{ki} g^{lj}$$

il en résulte :

$$(d\sigma)^2 = 2\,(\partial_{ij}u dx^i dx^j - u_m\,\Gamma^m_{j\,i} dx_l dx_k g^{ki} g^{lj}) =$$

$$= 2\,(\partial_{ji}u dx^i dx^j - u_m\,\Gamma^m_{j\,i}\,dx^i dx^j)$$

Conformément au chapitre précédant il en résulte ; $\boxed{(d\sigma)^2 = 2\,\partial_{ji}u dx^i dx^j}$

$u_m\Gamma^m_{j\,i} = 0$. $\quad u_m g^{ml}\Gamma_{l,ji} = 0 = u^l\Gamma_{l,ij}$ Cette condition peut etre notée :

$$u^l\,(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) = 0$$

Tenseur de déformation se réduit à :

$$\boxed{g_{ij} = 2\,\partial_{ij}u = 2u_{ij}}$$

.../...

appliquant le théorème de Ricci :

$$\nabla_k g_{ij} = 2\partial_{ijk}u - \Gamma^{l}_{i\,k} g_{lj} - g_{il}\,\Gamma^{l}_{j\,k} = o$$

$$2\partial_{ijk}u = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = \partial_k g_{ij}$$

ec $2\partial_{ij}u = g_{ij}$ on trouve l'identité confirmée.

us pouvons maintenant représenter les symboles de première espèce de ristoffel en fonction de u :

$$\Gamma_{i,jk} = \partial_k u_{ij} + \partial_j u_{ki} - \partial_i u_{jk} = \partial_{ijk}u + \partial_{kij}u - \partial_{jki}u =$$

$$= \partial_{ijk}u$$

ou

$$\boxed{\Gamma_{i,jk} = \partial_{ijk}u}$$

us pouvons donc écrire :

$$\Gamma_{i,jk} = \partial_k u_{ij}$$

$$\partial_i \Gamma_{i,jk} = \partial_{ki}u_{ij} = \partial_{jk}u_{ii}$$

ou

$$\boxed{\partial_{jk}u_{ii} = \partial_i \Gamma_{i,jk}}$$

nous retrouvons ainsi les 3 équations (II) de compatibilite de la théorie lassique

Nous écrivons maintenant :

$$\Gamma_{j,ii} = \partial_{iij} u \qquad \partial_j \Gamma_{j,ii} = \partial_{iij} u_j = \partial_{ijij} u$$

$$\Gamma_{i,jj} = \partial_{ijj} u \qquad \partial_i \Gamma_{i,jj} = \partial_{iijj} u = \partial_{ijij} u$$

$$\boxed{2\,\partial_{ij} u_{ij} = \partial_i \Gamma_{i,jj} + \partial_j \Gamma_{j,ii}}$$

Celles-ci sont les 3 autres équations (I) de la théorie de l'élasticité classique, mais en coordonnées harmoniques.

12- LE TENSEUR CONTRACTE R_{ij} DE RICCI-EINSTEIN

e tenseur contracté de Ricci-Einstein est défini par :

$$R_{ij} = \Gamma^{m}_{i\,l}\,\Gamma^{l}_{m\,j} - \Gamma^{m}_{i\,j}\,\Gamma^{l}_{m\,l} + \partial_j\,\Gamma^{l}_{i\,l} - \partial_l\,\Gamma^{l}_{i\,j}$$

l est :

$$\Gamma^{l}_{i\,l} = g^{lk}\Gamma_{k,il} = \frac{1}{2}\,g^{lk}\,\partial_i g_{kl} = \partial_i \ln\sqrt{\text{dét } g_{ij}} = \Gamma_i$$

D'après la condition de l'harmonicité $\Gamma_i = o \qquad \partial_j\,\Gamma_i = o$

$$\boxed{\partial_i \ln\sqrt{\text{dét } g_{ij}} = o}$$

$$\partial_l\,\Gamma^{l}_{i\,j} = \partial_l g^{lk}\,\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\,\partial_l\left[g^{lk}\,(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})\right]$$

$\Gamma^{l}_{m\,l} = \Gamma_m = o$ et on constate que $\Gamma^{m}_{i\,j}\,\Gamma^{l}_{m\,l} = o$

$$\Gamma^{m}_{i\,l}\,\Gamma^{l}_{m\,j} = \Gamma_i\,\Gamma_j = o$$

Il reste :

$$\boxed{R_{ij} = -\partial_l\,\Gamma^{l}_{i\,j}}$$

$$R_{ij} = -\partial_l\,\Gamma^{l}_{i\,j} = \frac{g^{ln}}{2}\,(\partial_{nl} g_{ij} - \partial_{il} g_{jn} - \partial_{jl} g_{in}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\partial_l g^{ln}\,(-\partial_j g_{in} - \partial_i g_{jn} + \partial_n g_{ij})$$

$$\partial_l g^{ln} = -\Gamma^{n}_{l\,m}\,g^{ml} - \Gamma^{l}_{m\,l}\,g^{nm}$$

.../...

trouve en coordonnées harmoniques :

$$- \Gamma^{n}_{lm} g^{ml} = \Gamma^{n} = o$$

l reste :

$$\partial_{l} g^{ln} = -\Gamma^{l}_{ml} g^{nm} = \partial_{m} (\ln \sqrt{\text{dét } g_{ij}}) g^{mn}$$

$\ln \sqrt{\text{dét } g_{ij}}$ étant le logarithme naturel de la racine

t avec :

$\partial_{m}(\ln\sqrt{\text{dét } g_{ij}}) = o$ on obtient :

$$R_{ij} = \frac{g^{ln}}{2}(\partial_{nl} g_{ij} - \partial_{il} g_{jn} - \partial_{jn} g_{il})$$ où ln sont des indices muets.

et pour R_{ik} nous changeons j en k :

$$R_{ik} = \frac{g^{ln}}{2}(\partial_{nl} g_{ik} - \partial_{il} g_{kn} - \partial_{kn} g_{il})$$

et ensuite :

$$R^{j}_{\cdot k} = g^{ji} R_{ik} =$$

$$R^{j}_{\cdot k} = g^{ji} \frac{g^{ln}}{2}(\partial_{nl} g_{ik} - \partial_{il} g_{kn} - \partial_{kn} g_{il})$$

et par contraction $k = j$

$$R^{j}_{\cdot j} = g^{ji} \frac{g^{ln}}{2}(\partial_{nl} g_{ij} - \partial_{il} g_{jn} - \partial_{jn} g_{il}) = -6\lambda$$

Nous introduisons dans les équations obtenues : $g_{ij} = 2u_{ij}$ et nous trouvons :

$$R^{j}_{\cdot k} = g^{ji} g^{ln} (\partial_{nl} u_{ik} - \partial_{il} u_{kn} - \partial_{kn} u_{il})$$

$$R^{j}_{\cdot j} = R = g^{ji} g^{ln} (\partial_{nl} u_{ij} - \partial_{il} u_{jn} - \partial_{jn} u_{il}) = -6\lambda$$

13- L'EQUATION DU CHAMP EN COORDONNEES HARMONIQUES

uparavant nous avons trouvé :

$$R^{ij} - \alpha\, g^{ij} = \chi\,(T^{ij} - \frac{T}{2}\, g^{ij})$$

$$g_{ki}\, R^{ij} - \alpha\, g_{ki}\, g^{ij} = \chi\,(g_{ki}\, T^{ij} - \frac{T}{2}\, g_{ki}\, g^{ij})$$

$$R_{k.}^{\ j} - \alpha\, g_{k.}^{\ j} = \chi\,(T_{k.}^{\ j} - \frac{T}{2}\, g_{k.}^{\ j})$$

n constate que pour $k = j$: $R - 3\alpha = -\chi\frac{T}{2}$ et pour $k \neq j$: $R_{k.}^{\ j} = \chi\, T_{k.}^{\ j}$

$$6\,\alpha = \chi\, T$$

$$T = T_{j.}^{\ j} = \frac{6\alpha}{\chi}$$

ous trouvons pour $j = k$:

$$\boxed{T = T_{j.}^{\ j} = \frac{g^{ji}}{\chi}\, g^{nl}\,(-\partial_{nl}u_{ij} + \partial_{il}u_{jn} + \partial_{jn}u_{il}) = \frac{g^{nl}}{\chi}\, g^{ji}\, \partial_{ijln}\, u}$$

our $k \neq j$:

$$T_{k.}^{\ j} = \frac{g^{ji}g^{ln}}{\chi}\,(-\partial_{nl}u_{ik} - \partial_{il}u_{kn} + \partial_{kn}u_{il})$$

$$\boxed{T_{k.}^{\ j} = \frac{g^{nl}}{\chi}\, g^{ji}\, \partial_{ikln}\, u}$$

$$\boxed{T = T_{j.}^{\ j} = \frac{g^{nl}}{\chi}\, g^{ji}\, \partial_{ijln}\, u}$$

14- L'EQUATION DE LA CONSERVATION D'ENERGIE

EN COORDONNEES HARMONIQUES

Nous avons trouvé le théorème de Hilbert sous la forme :

$$\operatorname{div} T^{il} = \nabla_l T^{il} = \partial_l T^{il} + \Gamma^{i}_{lm} T^{ml} + T^{in} \Gamma^{l}_{nl} = 0$$

En expliquant les différents termes :

$$T^{ml} = T^{m}_{\cdot k} g^{kl} = T_{kj} g^{jm} g^{kl}$$

Par échange d'indices nous obtenons :

$$\Gamma^{i}_{lm} T^{ml} = \Gamma^{i}_{lm} T_{kj} g^{jm} g^{kl} = \Gamma^{i}_{ml} g^{lj} g^{mk} T_{kj} = \Gamma^{i}_{ml} g^{lm} g^{jk} T_{kj}$$

$$\Gamma^{i}_{ml} g^{lm} = -\Gamma^{i} \qquad g^{jk} T_{kj} = T \qquad \Gamma^{i} = o \qquad \Gamma^{i} T = o$$

$$T^{in} \Gamma^{l}_{nl} = T^{in} \Gamma_n = T^{i} \Gamma = o \quad \text{puisque } \Gamma_n = o$$

Il reste :

$$\boxed{\nabla_l T^{il} = \partial_l T^{il} = o}$$

ÉQUATIONS FONDAMENTALES D'UNE THÉORIE GÉNÉRALISÉE DES STRUCTURES ÉLASTIQUES

TENSEUR DE DEFORMATION ET D'INFLUENCE

Nous avons défini la variation de la distance $d\sigma$ entre deux points infiniment voisins de la matière déformée par son carré :

$$(d\sigma)^2 = g_{jk}dx^j dx^k = g^{jk}dx_j dx_k$$

et nous avons constaté que les composantes covariantes g_{jk} du tenseur métrique étaient identiques à ceux du tenseur de déformation, (voir : équations de base d'une théorie de l'élasticité dans l'espace de Riemann), mais étant donné que par le jeu vertical des indices muets nous trouvons :

$$g_{jk}dx^j dx^k = g^{jk}dx_j dx_k$$

il nous faut examiner le sens physique des composantes contravariantes.

Nous notons, en admettant que la variation de la distance métrique entre deux points infiniment voisins est due à une variation de l'énergie élastique :

$$(d\sigma)^2 = \beta\, dE$$

il en résulte :

$$g_{jk}dx^j dx^k = \beta\, dP_j dx^j$$

Nous trouvons ainsi :

$$g_{jk}dx^k = \beta\, dP_j = dx_j$$

et par analogie :

$$dx_k = \beta\, dP_k$$

..../....

Par substitution nous obtenons ;

$$g^{jk} dx_j dx_k = \beta\, g^{jk} dP_j dP_k = (d\sigma)^2 = \beta\, dE$$

$$dE = \beta\, g^{jk} dP_j dP_k = \beta\, dP_j\, dP_k\, g^{kj}$$

Nous notons $\beta\, g^{jk} = y^{jk}$ et nous trouvons :

$$E = y^{jk} P_j P_k = P_k\, P_j\, y^{jk}$$

Nous appellons le tenseur métrique contravariant " tenseur d'influence ".

$$\boxed{g^{jk} = \frac{y^{jk}}{\beta}}$$

LE TENSEUR D'INFLUENCE

Le tenseur y^{jk} représente, en effet, l'influence d'une force P_k au point k sur la déformation y^j au point j :

$$y^j = y^{jk} P_k = P_k \, y^{kj}$$

Le système d'équations représente le comportement d'une structure élastique

$$y^{jk} = y\,(x^j, x^k) \quad \text{étant une fonction des variables } x^j, x^k$$

En tant que tenseur métrique cette fonction est symétrique :

$$E = y^{jk} P_j P_k = y^{kj} P_k P_j \qquad P_j P_k = P_k P_j$$

$$\boxed{y^{jk} = y^{kj}}$$

Ainsi le théorème de Betti-Maxwell n'est qu'une conséquence de l'existance d'un champ potentiel.

Dans le cas où le système élastique est une poutre, le point d'application de la charge et de la déformation sont déterminés par deux vecteurs, dans le cas d'une plaque (surface),par quatre,et dans le cas d'un solide par six compososantes.

TENSEUR D'INFLUENCE ET DERIVEES DU POTENTIEL ELASTIQUE

Nous notons $E = 2U = P_k P_i y^{ik} = P_k y^k = P_k P^k = E = O_k O^k$

Par différentiation covariante nous trouvons :

$$\partial_k E = \frac{\partial E}{\partial y^k} = P_k = E_k = O_k$$

et par différentiation contravariante :

$$\partial^i E = y^{ik} \partial_k E = E_k y^{ki} = P_k y^{ki} = y^i = \frac{\partial E}{\partial P_i} = \partial^i E = O^i$$

Il en résulte que le théorème de Castigliano n'est nullement un théorème, mais une différentiation d'une fonction scalaire.

Supposons maintenant qu'un certain nombre de points est fixe (points d'appuis ou encastrements). Pour ces points :

$$y^j = o$$

Il en résulte :

$$2 \partial^j U = \frac{\partial E}{\partial P_j} = o \Rightarrow y^j = o$$

ou définition d'un sous-ensemble de points définissant le repérage d'un système.

Ce procédé est connu sous le nom de théorème de Ménabreá.

On pourrait aussi dire qu'il s'agit d'une distinction entre actions et réactions.

.../..

Nous trouvons ensuite, par dérivations successives contravariantes :

$$\partial^k \partial^i U = \partial^k y^{il} \partial_l U = \partial^k \frac{\partial U}{\partial P_l} = \frac{y^{ik}}{2}$$

ou

$$\frac{y^{ik}}{2} = \partial^{ik} U \qquad \text{et} \qquad \frac{y^{ki}}{2} = \partial^{ki} U = \partial^{ki} 0$$

On constate que :

$$\frac{y^{ik}}{2} = \partial^{ik} U \qquad \text{et} \qquad \frac{y^{ki}}{2} = \partial^{ki} U$$

On voit bien que la fonction d'influence est un tenseur métrique et la deuxième dérivée d'une fonction potentielle, et qu'elle est symétrique :

$$\partial^{ik} U = \partial^{ki} U \qquad \text{ou} \qquad y^{ik} = y^{ki}$$

Nous confirmons donc le théorème de Betti-Maxwell.

La fonction d'influence (tenseur d'influence) est un tenseur métrique.

ELEMENT D'ANGLE DE DEFORMATION

L'élément de l'angle de rotation est défini pour un point par l'équation :

$$d\Theta^{i}_{\cdot k}\, y^{k} = dy^{i}$$

où dy^{i} est le déplacement infinitesimal dûe à la rotation.

Nous notons l'équivalence $d\Theta^{i}_{\cdot k} \equiv \omega^{i}_{k}$ et $dy^{i} \equiv \omega^{i}_{\cdot o}$

Soit $\Theta^{i}_{\cdot kl}$ la fonction d'influence pour la rotation $\Theta^{i}_{\cdot k}$ due à une déformation dy^{l} au point l. Nous pouvons alors écrire :

$$d\Theta^{i}_{\cdot k} = d\Theta^{i}_{\cdot kl}\, dy^{l} \equiv \omega^{i}_{k} = \Gamma^{i}_{kl}\, dy^{l}$$

et puisque les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont symétriques, nous trouvons :

$$\Gamma^{i}_{kl} = \Gamma^{i}_{lk}$$

ou

$$\Theta^{i}_{\cdot kl} = \Theta^{i}_{lk}$$

Cette symétrie est un autre aspect du théorème de Betti-Maxwell.

MOMENT ET ENERGIE INTERNE

Nous définissons l'élément du moment par l'équation ci-dessous :

$$dM_{l.}^{\ k} = dP_l \wedge dx^k = \varepsilon_{l.}^{\ k}\, dP_l\, dx^k$$

$$dP_l = \partial_j P_l\, dx^j$$

et en tenant compte de la relation : $P_l = \partial_l E$

nous obtenons :

$$\partial_j P_l = \partial_{lj} E = \frac{1}{\beta} g_{lj}$$

ou

$$dM_{l.}^{\ k} = \partial_{lj} E\, dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{\beta} g_{lj}\, dx^j \wedge dx^k$$

En formant l'invariant (forme quadratique) :

$$dU = d\Theta^{l}_{\cdot k}\, dM^{k}_{\cdot l} \quad \text{nous trouvons avec} \quad d\Theta^{l}_{\cdot k} = \Gamma^{l}_{ki}\, dx^i :$$

$$dU = \frac{1}{\beta} g_{jl} \Gamma^{l}_{ki}\, dx^i dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{\beta} \Gamma_{j,ki}\, dx^i dx^j \wedge dx^k$$

et nous trouvons finalement avec :

$$2\, \Gamma_{j,ki} = \partial_{jki} g = \partial_{ijk} g$$

$$\boxed{dE = \frac{1}{\beta} \partial_{ijk}\, g\, dV^{ijk}} \quad \text{pour l'énergie totale}$$

$\frac{1}{\beta} \partial_{ijk} g$ est la densité de l'énergie élastique

dV^{ijk} est la capacité de l'élément de volume de la matière élastique,

TENSEUR DE RIGIDITE ANGULAIRE

Nous définissons la fonction de rigidité angulaire Θ^{il}_{km} par l'équation :

$$\Theta^{il}_{km}\, dM_{l.}^{\ m} = \Theta_{k.m}^{\ i}\, dy^m = d\,\Theta_{k.}^{\ i}$$

avec :
$$\Theta^{il}_{km} = \partial^l \Theta_{k\ m}^{\ i} = \partial^l \Gamma^i_{km}$$

Il en résulte :

$$2\ \Theta^{il}_{km}\, dM_{l.}^{\ m}\, dM_{l.}^{\ k} = dE$$

Cette dernière équation représente l'énergie élastique due à l'action des moments sur une matière élastique.

Les composantes du moment statique sont définies par l'équation :

$$M_{i.}^{\ j} = \frac{1}{\beta}\, O_i \Lambda O^j = \frac{1}{\beta}\, \varepsilon_{i.}^{\ j}\, O_i O^j = \frac{1}{\beta} g_i \Lambda g^j = P_i \Lambda x^j = P_i x^j \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

L'élément du moment statique d'une force peut-être défini soit par une forme linéaire :

$$dM_{i.}^{\ j} = \frac{1}{\beta}\, d(g_i g^j)\ \varepsilon_{i.}^{\ j} = \frac{1}{\beta}\ (dg_i g^j + g_i dg^j)\, \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

soit par une forme quadratique comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent:

$$dM_{i.}^{\ j} = \frac{1}{\beta}\, dg_i\ dg^j\, \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

Dans le cas d'une forme linéaire nous pouvons écrire :

$$d\Theta^{k}_{\cdot l} = \frac{1}{\beta}\, \Theta^{ki}_{jl}\, d(g_i g^j)\, \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

.../....

Nous devons maintenant examiner les différentes formes de l'élément d'énergie , auquelles nous conduisent ces réflexions.

Sous une forme linéaire l'élément infinitésimal de l'énergie élastique, due à l'action des moments sur une matière élastique nous comprenons :

$$dU = d(\Theta_{l.}^{\ k} M_{k.}^{\ l}) = d\Theta_{l.}^{\ k} M_{k.}^{\ l} + \Theta_{l.}^{\ k} dM_{k.}^{\ l}$$

$$d\,\Theta_{l.}^{\ k} M_{k.}^{\ l} = \frac{1}{\beta^2}\,\Theta_{lj}^{ik}\, g_k\, g^l\, \varepsilon_{k.}^{\ l}\, d\,(g_i g^j)\, \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

$$\Theta_{l.}^{\ k}\, d\, M_{k.}^{\ l} = \frac{1}{\beta^2}\, g_i\, \Theta_{lj}^{ik}\, g^j\, d\,(g_k g^l)\, \varepsilon_{k.}^{\ l} \varepsilon_{i.}^{\ j}$$

et on obtient ainsi :

$$dU = \frac{1}{\beta^2}\left[\Theta_{lj}^{ik}\, g_k g^l \varepsilon_{k.}^{\ l}\, d\,(g_i g^j)\, \varepsilon_{i.}^{\ j} + g_i\, \Theta_{lj}^{ik}\, g^j\, d\,(g_k g^l) \varepsilon_{k.}^{\ l} \varepsilon_{i.}^{\ j}\right]$$

Le tenseur de rigidité angulaire, dont les composantes sont Θ_{li}^{ik}, est symétrique aussi bien par rapport aux indices covariants que contravariants :

$$\Theta_{lj}^{ik} = \Theta_{jl}^{ki}$$

Les deux termes entre crochets étant identiques nous pouvons écrire :

$$dE = \frac{2}{\beta^2}\,\Theta_{lj}^{ik}\, g_k\, g^l\, d\,(g_i g^j)\, \varepsilon_{k.}^{\ l}\, \varepsilon_{i.}^{\ j} = 2\,\Theta_{lj}^{ik}\, M_{k.}^{\ l}\, d\, M_{i.}^{\ j}$$

Ou nous pouvons aussi noter ;

$$dU = \Theta_{lj}^{ik}\, M_{k.}^{\ l}\, d\, M_{i.}^{\ j}$$

$$U = \int \Theta_{lj}^{ik}\, M_{k.}^{\ l}\, d\, M_{i.}^{\ j}$$

.../...

et nous trouvons ainsi :

$$\partial^m E = y^m = \partial^m \int 2\Theta^{ik}_{lj} M_{k.}^{l} \, d M_{i.}^{j} = y^m$$

$$\partial_m E = \partial_m \int 2\Theta^{ik}_{lj} M_{k.}^{l} \, d M_{i.}^{j} = P_m$$

C'est sous cet aspect général que nous reconnaissons les intégrales du principe des travaux virtuels. (Equations de MUELLER-BRESLAU).

LA FONCTION DE RIGIDITE ANGULAIRE

ET LE TENSEUR DE RIEMANN - CHRISTOFFEL

Nous avons défini comme fonction de rigidité angulaire, le tenseur Θ^{in}_{jl} par l'équation :

$$d\,\Theta^{i}_{\cdot j} = d\,M^{l}_{n.}\,\Theta^{in}_{lj}$$

Nous notons l'élément du moment par :

$$d\,M^{l}_{n.} = d\,P_n \wedge dx^l \qquad \text{avec} \qquad d\,P_n = \frac{1}{\beta}\,g_{nm}\,dx^m$$

$$d\,M^{l}_{n.} = \frac{1}{\beta}\,g_{nm}\,dx^m \wedge dx^l$$

Par substitution nous trouvons :

$$d\,M^{l}_{n.}\,\Theta^{in}_{lj} = \frac{1}{\beta}\,\Theta^{in}_{jl}\,g_{nm}\,dx^m \wedge dx^l$$

ou

$$\boxed{d\,\Theta^{i}_{\cdot j} = \frac{1}{\beta}\,\Theta^{i}{}_{\cdot j,lm}\,dx^m \wedge dx^l = \frac{1}{\beta}\,\Theta^{i}{}_{\cdot j,lm}\,\varepsilon^{ml}\,dx^m\,dx^l}$$

Ensuite nous constatons :

$$dx^m \wedge dx^l = -\,dx^l \wedge dx^m$$

et puisque les indices muets n'ont aucune influence sur l'élément $d\,\Theta^{i}_{\cdot j}$:

$$\Theta^{i}{}_{\cdot j,ml} = -\Theta^{i}{}_{\cdot j,lm}$$

$$\frac{1}{\beta}\,\Theta^{i}{}_{\cdot j,lm} = R^{i}_{\cdot j,lm}$$

.../...

Nous trouvons donc :

$$d\Theta^{i}_{\cdot j} = \frac{1}{\beta}\,\Theta^{i}_{\cdot j,lm}\,dx^{m}\wedge dx^{l} = R^{i}_{\cdot j,lm}\,dx^{m}\wedge dx^{l}$$

$R^{i}_{\cdot j,lm}$ étant les composantes mixtes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

$$d\Theta^{i}_{\cdot j} = \Gamma^{i}_{jk}\,dy^{k}$$

$$\Gamma^{i}_{jk}\,dy^{k} = R^{i}_{\cdot j,lm}\,dx^{m}\wedge dx^{l}$$

Nous pouvons maintenant écrire pour l'élément de l'énergie :

$$dE = 2d\Theta^{i}_{\cdot j}\,d\,M^{j}_{\cdot i} \qquad d\,M^{j}_{\cdot i} = \frac{1}{\beta}\,g_{ik}\,dx^{j}\wedge dx^{k}$$

$$dE = \frac{2}{\beta^{2}}\,\Theta^{i}_{\cdot j,lm}\,g_{ik}\,dx^{m}\wedge dx^{l}\;dx^{j}\wedge dx^{k}$$

$$g_{ik}\,\Theta^{i}_{\cdot j,lm} = \Theta_{kj,lm}$$

et il en résulte finalement par permutation d'indices :

$$dE = \frac{2}{\beta^{2}}\,\Theta_{jk,lm}\,dx^{m}\wedge dx^{l}\;dx^{k}\wedge dx^{j}$$

Le tenseur $\Theta_{jk,lm}$ possède par rapport aux permutations des indices les propriétés suivantes :

$$\Theta_{jk,lm} = \Theta_{lm,jk}$$

$$\Theta_{jk,lm} = \Theta_{kj,lm}$$

$$\Theta_{jk,lm} = \Theta_{jk,ml}$$

$_{jk,lm}$ sont identiques aux composantes covariantes du tenseur de
n-Christoffel au coefficient β près.

HOMOGENEITE DES EQUATIONS DE STRUCTURE

Nous définissons la fonction de rigidité angulaire Θ^{il}_{mk} par les équations :

$$M^{m}_{l.}\,\Theta^{il}_{mk} = \Theta^{i}_{.k} \qquad M^{k}_{.i}\,\Theta^{il}_{mk} = \Theta^{l}_{m.}$$

$$\Theta^{il}_{mk} = \partial^{l}\,\Gamma^{i}_{mk} = y^{ln}\partial_{n}\,\Gamma^{i}_{mk} = \partial_{n}\,\Gamma^{i}_{mk}\,y^{nl}$$

en rappellant que : $\partial^{i}E = y^{i} = y^{ik}\partial_{k}E$

Nous avons trouvé que :

$$M^{k}_{.i}\,M^{m}_{l.}\,\Theta^{il}_{mk} = 0 = U$$

Nous pouvons écrire sans orienter à priori les moments et les angles :

$$P_{l}\,\Theta^{il}_{mk}y^{m}\,\Theta^{il}_{mk} = \Theta^{i}_{.k} \quad \text{et} \quad P_{n}\,y^{nm}\,\Theta^{i}_{mk} = \Theta^{i}_{.k}$$

Nous trouvons ainsi avec $\Theta^{i}_{.k}\,y^{k} = \Theta^{i} = 0^{i} = y^{i}$

$$y^{i} = \frac{1}{2}\,(P_{l}\,y^{m}\,\Theta^{il}_{mk} + P_{n}\,y^{nm}\,\Theta^{i}_{mk})\,y^{k}$$

En remplaçant dans cette dernière équation l'indice muet n par l et l'indice i par j on obtient :

$$y^{j} + P_{l}\,\frac{1}{2}\,(y^{m}\,\Theta^{jl}_{mk} + y^{lm}\,\Theta^{j}_{mk})\,y^{k}$$

On constate ainsi une parfaite homogénéité pour les équations élastiques d'une structure :

$$y^{i} = P_{l}\,y^{li}.$$

$$y^{j} = P_{l}\,\frac{1}{2}\,(y^{m}\,\Theta^{jl}_{mk} + y^{lm}\,\Theta^{j}_{mk})\,y^{k}$$

.../...

ou $\quad y^i = P_l \, y^{li}$

$$y^j = P_l \, \frac{1}{2} \left(\Theta^{jl} + \Theta^{lj} \right)$$

$P_l \, y^k$ étant le moment statique non orienté d'une force .

L'équation $P_l \, y^{lm} \, \Theta^{\,j}_{m\,k} \, y^k = \Theta^{\,j}_{\cdot k} \, y^k$ représente l'influence d'une force P_l sur un déplacement y^j, par contre :

$P_l \, y^m \, \Theta^{lj}_{mk}$ représente l'influence du moment non orienté à priori $P_l \, y^m$.

Mais on peut aussi interpreter le terme $P_l \, y^{lm} \, \Theta^{\,j}_{m\,k} \, y^k$ comme déplacement y^i par rotation due à un déplacement y^m et y^{lm} devient en quelque sorte une fonction de transfert d'influence .

MATRICES DE RIGIDITE ET DE SOUPLESSE

Ces relations entre forces, moments d'une part, et déplacements ou angles de déformation d'autre part, d'une structure élastique, peuvent être représentées par les deux groupes d'équations ci-dessous :

$$0_j \, 0^{jk} = 0^k \qquad \text{et} \qquad 0_{jl} \, 0^l = 0_j \, .$$

En définissant 0_j comme des composantes du vecteur-force, et 0^k comme composantes du vecteur-déplacement, nous identifions la matrice :

0^{jk} comme matrice de rigidité et

0_{jl} comme matrice de souplesse

Nous constatons qu' entre ces matrices il existe la relation :

$$0^{jk} \, 0_{kj} = 0_{jk} \, 0^{kl} = 0_{j.}^{\;j} = g_{j.}^{\;j}$$

Compte tenue de leur symétrie :

$$0^{jk} = 0^{kj} \qquad 0_{jl} = 0_{lj}$$

La matrice 0_{jk} est la matrice inverse de la matrice 0^{jk}.

Les éléments y^{jk} et y_{jk} de ces matrices, sont des fonctions d'influence d'une structure élastique quelconque, et l'ensemble de leurs composantes dépend à priori, d'un champ tensoriel dérivé d'une fonction potentielle d'un <u>milieu continu</u> ou plus précisément du tenseur métrique riemannien .

Mais dès que nous considérons comme sous-ensemble une structure grillagée, (treillis, charpente plane, ou spaciale), avec un nombre de noeuds finis, nous attribuons à chaque noeud une composante :

$$y^{jk} \quad \text{ou} \quad y_{jk}$$

Ces composantes deviennent des constantes (j=1,2,3, ..., k=1,2,3, ...) .

.../...

Nous obtenons, comme nous l'avons constaté au début de notre étude, un système d'équations à un nombre fini d'inconnues.

Mais nous pouvons considérer les composantes y^{ik} et y_{ik} comme valeurs discrètes d'un sous-ensemble de fonctions d'influence associées.

Par exemple, s'il s'agit d'une poutre continue sur appuis en choisissant les n-2 appuis intermédiaires comme inconnues hyperstatiques, les composantes y^{ik} seront les ordonnées des lignes d'influence pour n-2 points d'appuis d'une poutre sur deux appuis.

Nous pouvons aussi bien, selon le choix d'un autre système statique ou hyperstatique de base, procèder autrement et comme nous l'avons constaté, faire un choix correspondant de composantes contravariantes : $\partial^i U = 0$

En étudiant une structure dans un espace à r dimensions les y^{ik} et y_{ik} deviennent des constantes et nous passons ainsi à une structure euclidienne, mais nous devons encore distinguer, selon le système de coordonnées choisies d'un espace euclidien, entre les composantes co - ou contravariantes des tenseurs éléments des matrices de rigidité ou souplesse si les coordonnées ne sont pas orthogonales.

Ce n'est que dans un système euclidien orthogonal que les indices covariants et contravariants se confondent.

Ce n'est que dans un tel système et à condition qu'il s'agisse d'un espace V^3 que les tenseurs formés par produit extérieur de deux vecteurs (comme le moment, par exemple), peuvent être remplacés par des vecteurs axiaux.

Une structure grillagée, représente en quelque sorte un modèle d'un univers discontinu.

ONCLUSIONS ET PERSPECTIVES POUR LA PHYSIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Nous avons évité de nous attaquer avec trop de zèle révolutionnaire la symbolisation des notations surtout des signes de base, pour permettre ux lecteurs non habitués à notre écriture de pouvoir mieux suivre nos idées, out en réduisant le nombre de signes utilisés.

Il est par exemple facile, de se rendre compte que les signes E et g ont employés au cours de notre étude dans un sens identique :

$$E \equiv g \quad \text{de même} \quad U, u, \Theta$$

$$U \equiv u \equiv \Theta$$

Du point de vue mathématique ces signes sont à un facteur près dentiques.

Il en est de même pour les signes de base des coordonnées x et y.

Nous pouvons écrire : $E \equiv g \equiv 2U \equiv 2u \equiv 2\Theta \equiv x \equiv y \equiv O$

Des raisonnements sur un ensemble scalaire O auraient suffit pour établir e schéma logique de notre théorie.

Celà nous parait naturel puisque l'objet principal de notre étude, 'energie nous échappe en tant que multiple apparence d'une"réalité" et il ous reste que sa "projection", son ombre" sous forme arbitraire d'un nom ou ymbole.

Pour la section "Formes linéaires et quadratiques de l'énergie", faudrait peut-être dire théorie généralisée du potentiel, nous tirons la nclusion que si on parle de la condition de l'harmonicité, de l'existence une fonction potentielle ou de l'existence de l'équation différentielle Laplace ou que nous constatons l'absence de sources d'énergie du champ

omme aussi de se placer dans un espace de Riemann, c'est toujours d'objets quivalents dont on parle.

Grâce à l'introduction du tenseur d'énergie le moment et l'énergie araissent maintenant comme composantes du même tenseur.

La théorie de l'élasticité généralisée et des structures élastiques ous ouvre plusieurs chemins à suivre pour nos futures recherches :

Nous pouvons examiner avec ce nouvel outillage les méthodes de la héorie de l'élasticité classique et de la résistance des matériaux pour étudier es bornes d'applications de certaines théories.

Ensuite nous pouvons envisager un développement de notre théorie pour on application pratique à des cas concrets, mais nous sommes alors obligés de éterminer les constantes de cette théorie par des essais.

On peut aussi envisager un élargissement de la théorie de l'élasticité énéralisée dans le cadre plus large de la physique des milieux continus et xaminer les relations entre les différentes formes de l'énergie (énergie lastique, magnétique, thermique etc...)

Finalement il parrait possible de construire d'une façon analogue une héorie généralisée de la plasticité avec la condition $\mathrm{div}T_{ij} \neq 0$ donc par ntroduction de l'hypothèse d'existence de sources(négatives) d'énergie comme ertes par polarisation magnétique pour l'acier par exemple ou transmission d'une uantité d'énergie thermique au milieu ambiant.

Le champ n'est plus stationaire si nous l'examinons en fonction u temps. Il est donc probable que nous devons construire une telle théorie dans n espace de Weyl et Eddington.

On se trouve alors dans un espace avec torsion, c'est à dire que les ymbôles de Christoffel ne sont plus symétrique : $\Gamma^{i}_{jk} \neq \Gamma^{i}_{kj}$

Les déformations deviennent fonctions du processus de chargement et les onditions d'intégrabilité sont mise en cause.

Nous ne pensons pas que ce chemin, aussi séduisant qu'il pourrait arraître à un esprit curieux, serait suceptible de conduire vers des solutions ratiques.

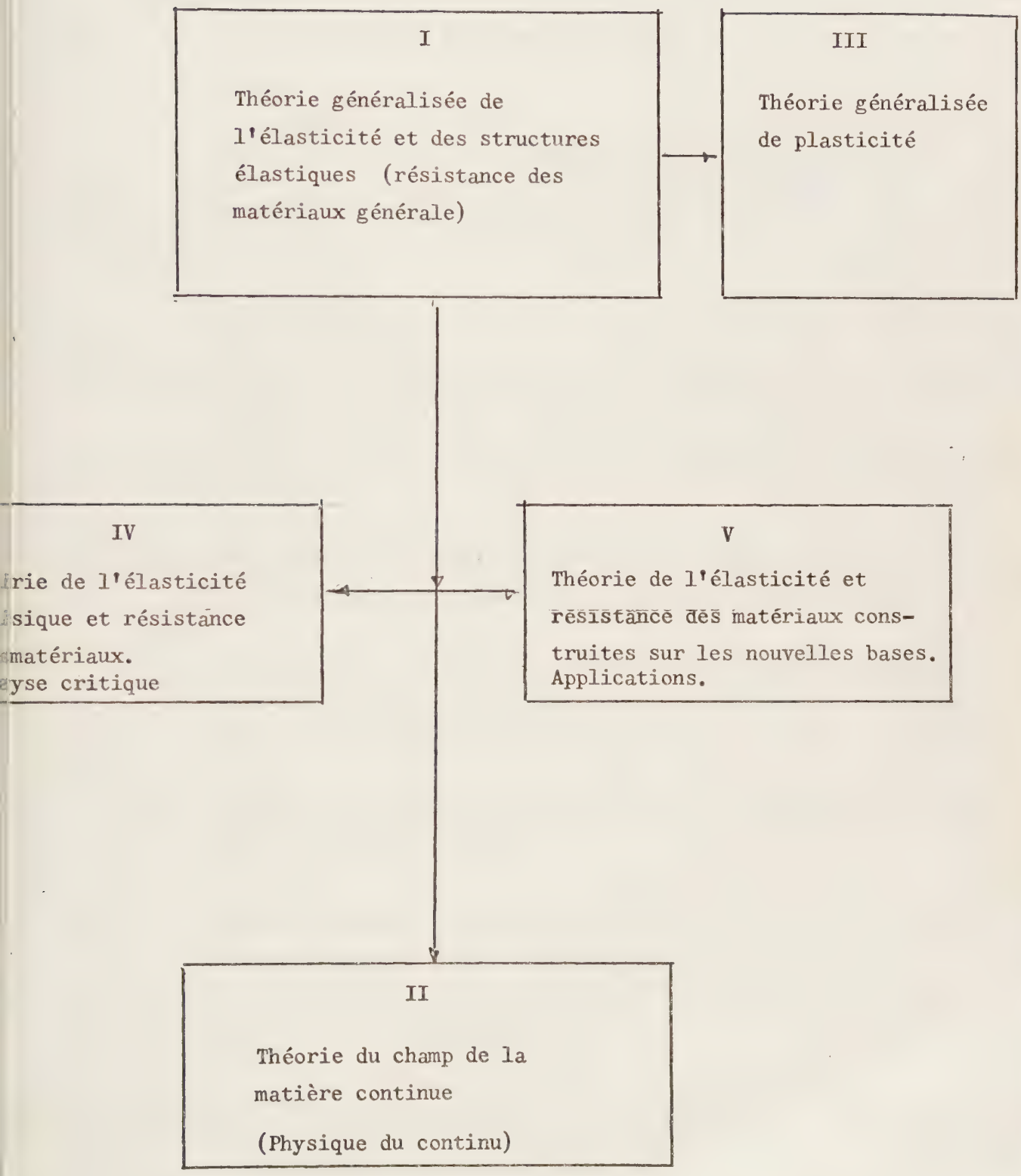
Si nous tenons compte des résultats acquis de ce mémoire, nous pouvons n ce qui concerne la théorie de l'élasticité généralisée constater que le but l'intégrer à la physique mathématique des milieux continus est atteint.

Les liaisons entre les phénomènes gravitationnels et élastiques sont tablies par introduction du tenseur $R_{j.}^{i} - \frac{R}{2} g_{j.}^{i}$ et la théorie de l'élasticité énéralisée devient partie intégrante de la physique.

Nous tirons ensuite la conclusion que le théorème de Betti-Maxwell n'est u'une conséquence de l'existence d'un champ d'un fonction potentielle, et que le héorème de Castigliano n'est nullement un théorème, mais la différentiation ontravariante de la fonction potentielle de l'énergie élastique et le théorème e Ménabréa une annulation d'un certain nombre de composantes du vecteur léplacement conforme aux points fixes (appuis ou encastrements) d'une structure élastique choisie.

Nous croyons avoir atteint le but que nous nous sommes fixés.

Léo de LORINGHOVEN.


I
Théorie généralisée de l'élasticité et des structures élastiques (résistance des matériaux générale)
III
Théorie généralisée de plasticité
IV
rie de l'élasticité
sique et résistance
matériaux.
yse critique
V
Théorie de l'élasticité et résistance des matériaux construites sur les nouvelles bases. Applications.
II
Théorie du champ de la matière continue
(Physique du continu)

BIBLIOGRAPHIE

des ouvrages relatifs au calcul tensoriel et matriciel et à la théorie de la relativité.

1. - APPELL, Paul. Traité de mécanique rationnelle, 5ème tome. Eléments de calcul tensoriel. Applications géométriques et mécaniques. Paris, 1945, Gauthier-Villars.

2. - ARZELIES, Henri. La cinématique relativiste. Paris, 1955, Gauthier-Villars.

3. - ARZELIES, Henri. Etudes relativistes, fascicule I. Relativité généralisée, gravitation. Paris, 1961, Gauthier-Villars.

4. - BRILLOUIN, Léon. Cours de physique théorique. Les tenseurs en mécanique et en élasticité. Paris, 1949, Masson & Cie.

5. - CARTAN, Elie. Leçon sur la géométrie des espaces de Riemann. Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston JULIA, Fascicule II.

6. - BARBOTTE, Jules. Bibliothèque de la science moderne. Le calcul tensoriel. Bordas, 1948.

7. - DELTHEIL, Robert. Compléments de mathématiques générales à l'usage des physiciens et des ingénieurs, tome I. Algèbre linéaire et calcul différentiel. Paris, J.B. Baillière et Fils, 19 rue Hautefeuille.

8. - FAVARD, J. Cours de géométrie différentielle locale. Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston JULIA, fascicule XXIV. Paris, 1957, Gauthier-Villars.

9. - v. LAUE, Max. La théorie de la relativité (deux volumes). Paris, 1926, Gauthier-Villars.

10. - LICHNEROWICZ, André. Eléments de calcul tensoriel. Collection Armand Colin (section de Mathématiques), 1951.

11. - LICHNEROWICZ, André. Algèbre et analyse linéaires. Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens, publiés sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowitcz.

12. - PAPIN, Denis et KAUFMANN . Cours de calcul matriciel appliqué. 1957, Paris, Albin Michel.

13. - PAPIN, Denis et KAUFMANN . Cours de calcul tensoriel appliqué, Paris, 1961, Albin Michel.

14. - LEVI-CIVITA und RICCI. Der absolute Differentialkalkül. Springer-Verlag, Berlin u. Wien.

15. - ROBERT. Cours de résistance de matériaux E.N.S.G.M.

BIBLIOGRAPHIE DE L'AUTEUR.

Comparaison des théories de torsion des tiges selon Saint - Venant et Vlassov
C.T.I.C.M. "Construction Métallique" N° 2 Juin 1965.

Les équations de base d'une théorie de l'élasticité dans l'espace de Riemann et leur liaison avec les équations d'Einstein C.R. Acad.Sc. Paris T.262, p.319-
- 322
31 Janvier 1966.

Les tenseurs de déformation et d'influence"d'une théorie de l'élasticité généralisée dans l'espace de Riemann et les équations fondamentales d'une théorie généralisée des structures élastiques"
C.R. Acad. Sc. Paris T.266 p.1021 - 1023. 6Mars 1968.

UNIVERSITÉ DE PARIS

ULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

SAINT BERNARD - PARIS V'

VICE DE LA SCOLARITÉ

u des Enseignements du 3e Cycle

NE : 336-25-25 - P

CTICM - DR
Reçu le 15-7-70
N° 8477

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'UNIVERSITE

THESE DE :

Nom : De LORINGHOVEN

Prénoms : Léo

Né (e) le 10 Juin 19 10 à TSARKOIE Dépt Russie

SUJETS

1ère THESE : " Equations de base d'une théorie de l'élasticité et de structures élastiques dans un espace de Riemann."

2e THESE (Propositions faites par la Faculté) :
" Differentes méthodes de construction du $(ds)^2$ de SCHAWRZSCHILD ."

Vu et approuvé
Paris, le 18 Juin 1970
Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

UNIVERSITÉ DE PARIS

Vu et permis d'imprimer
Paris, le
Le Recteur de l'Académie
de Paris

Sc.3e c. 65-16